Corrigé de la seconde épreuve de mathématiques

CCP 2007 - Filière MP

I. Description des normes euclidiennes

1.a Si N est une norme euclidienne, associée au produit scalaire φ, et si $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} N(x+y)^2 + N(x-y)^2 &= \varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) \\ &= \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) + \varphi(x,x) - 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) \\ &= 2\left(N(x)^2 + N(y)^2\right) \end{aligned}$$

Avec $x = e_1$ et $y = e_2$, nous avons $||x+y||_\infty^2 + ||x-y||_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2\left(||x||_\infty^2 + ||y||_\infty^2\right)$ donc $||\ ||_\infty$ n'est pas une norme euclidienne.

1.b $||\ ||_2$ est la norme associée au produit scalaire canonique défini par l'énoncé : c'est donc une norme euclidienne. Supposons maintenant que p est un réel strictement plus grand que 1 et distinct de 2. Toujours avec $x = e_1$ et $y = e_2$, nous avons :

$$||x+y||_p^2 + ||x-y||_p^2 = 2^{2/p} + 2^{2/p} \neq 4 = 2\left(||x||_p^2 + ||y||_p^2\right)$$

car $2/p \neq 1$: la norme $||\ ||_p$ n'est donc pas euclidienne.

2. $< \cdot, \cdot >_S$ est clairement une forme bilinéaire. Nous avons ensuite :

- pour $x, y \in E$, $< x, y >_S = {}^tXSY = {}^t({}^tXSY) = {}^tY{}^tSX = {}^tYSX = < y, x >_S$ donc $< \cdot, \cdot >_S$ est symétrique ;
- pour x non nul, $< x, x >_S$ est strictement positif car $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: $< \cdot, \cdot >_S$ est définie positive.

3. Pour $x, y \in E$, nous avons :

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = {}^tXSY$$

et pour X non nul, associé au vecteur x, ${}^tXSX = \varphi(x,x) > 0$ donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II. Quelques généralités et exemples

4. Si $u \in \text{Isom}(N)$ et si $x \in \text{Ker}\,(u)$, $N(x) = N(u(x)) = N(0) = 0$ donc $x = 0$: u est donc injective et $u \in GL(E)$ (E est de dimension finie).

$\text{Isom}(N)$ est non vide puisqu'il contient l'identité.

Si $u, v \in \text{Isom}(N)$, on a $N(u \circ v(x)) = N(v(x)) = N(x)$ pour tout $x \in E$ et donc $u \circ v \in \text{Isom}(N)$.

Si $u \in \text{Isom}(N)$, on a $N(u^{-1}(x)) = N(u(u^{-1}(x))) = N(x)$ pour tout x, donc $u^{-1} \in \text{Isom}(N)$.

$\text{Isom}(N)$ est donc un sous-groupe de $GL(E)$.

5. Soit $u \in \text{Isom}(N)$. Pour $x \in \Sigma(N)$, $N(u(x)) = N(x) = 1$, donc $u(x) \in \Sigma(N)$: nous avons donc $u(\Sigma(N)) \subset \Sigma(N)$. Comme $u^{-1} \in \text{Isom}(N)$, cela donne également $u^{-1}(\Sigma(N)) \subset \Sigma(N)$, soit $\Sigma(N) \subset u(\Sigma(N))$.

Réciproquement, supposons que $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$ et soit x un élément quelconque de E. Si $x = 0$, on a $N(u(x)) = 0 = N(x)$. Sinon, $y = x/N(x) \in \Sigma(N)$, et donc :

$$N(u(x)) = N(u(N(x)y)) = N(x)N(u(y)) = N(x)$$

car $u(y) \in \Sigma(N)$: u est donc une N-isométrie.

6. $\Sigma(|| \ ||_1)$ est le carré $\mathcal{C}$ de sommets $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$ et $D = (0,-1)$, qui est conservé par la symétrie s mais pas par la rotation r, puisque $s(A) = D$, $s(B) = C$, $s(C) = B$, $s(D) = A$ et $r(A) = (1/2, \sqrt{3}/2) \notin \mathcal{C}$. s est donc une $|| \ ||_1$-isométrie mais r n'en est pas une.

7.a $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7.b Diagonalisons la matrice symétrique S dans une base orthonormale :

$$\begin{aligned}
\det(S - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2(4-\lambda)
\end{aligned}$$

4 est valeur propre simple, associée au vecteur propre $e_1 - e_3$. Le plan propre associé à la valeur propre 2 est donc le plan orthogonal à ce vecteur. Nous obtenons donc facilement une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de vecteurs propres :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_3), \ \varepsilon_2 = e_2 \text{ et } \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_3).$$

Nous pouvons donc écrire $P^{-1}SP = D$, i.e. $S = PD\,{}^tP$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.c La matrice S est symétrique définie positive (on peut par exemple écrire que ${}^tXSX = {}^tYDY > 0$ pour $X \neq 0$, avec $Y = {}^tPX$), donc N_q est la norme euclidienne associée au produit scalaire $< \cdot, \cdot >_S$.

7.d et e Dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $\Sigma(N_q)$ a pour équation :

$$4X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 = 1.$$

$\Sigma(N_q)$ est donc un ellipsoïde de révolution, d'axe engendré par le vecteur $e_1 - e_3$.

7.f Toutes les rotations autour de l'axe $\mathbb{R}(e_1 - e_3)$ conservent $\Sigma(N_q)$ et sont donc des N_q-isométries : le groupe $\text{Isom}(N_q)$ est infini.

III. Étude de Isom(N) lorsque N est une norme euclidienne

8.a Si u est une N_S-isométrie, les formes bilinéaires symétriques $\varphi_1 \ : \ (x,y) \longmapsto < u(x), u(y) >_S$ et $< \cdot , \cdot >_S$ sont associées à la même forme quadratique : elles sont donc égales (formules de polarité).

La réciproque est évidente.

8.b $u \in \mathrm{Isom}(N_S)$ si et seulement si ${}^t(AX)S(AY) = {}^tXSY$ pour tous $X, Y \in E$, i.e. si et seulement si ${}^tASA = S$ (on peut identifier grâce aux questions 2 et 3).

9. En particulier, $A \in \mathrm{ISOM}(|| \ ||_2) \iff {}^tAA = I_n$, donc $\mathrm{ISOM}(|| \ ||_2) = O_n(\mathbb{R})$. Ce groupe est infini, puisqu'il contient par exemple les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ & & \\ 0 & & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

qui sont deux à deux distinctes pour $\theta \in [0, 2\pi[$.

10.a Si P est dans le noyau de u, P possède $r+1$ racines distinctes et est de degré au plus r : il est donc nul. Ainsi, u est injective, donc surjective ($\mathbb{R}_r[X]$ et $\mathbb{R}^{r+1}$ sont de même dimension finie) : tout vecteur $(y_0, y_1, \ldots, y_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ possède donc un unique antécédent L.

10.b Soient $x_0, x_1, \ldots, x_r$ tels que $x_0 < x_1 < \ldots < x_r$ et $\{x_0, x_1, \ldots, x_r\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. En appliquant la question précédente avec $y_i = \sqrt{x_i}$ (pour $0 \leq i \leq r$), nous obtenons un polynôme L qui convient.

11.a Comme S est symétrique définie positive, il existe une matrice orthogonale P et des réels $\lambda_i > 0$ tels que

$$S = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,{}^tP$$

Alors la matrice $A = P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})\,{}^tP$ est une racine carrée de S (car ${}^tP = P^{-1}$) et est clairement symétrique définie positive.

11.b Notons $U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et $V = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, et soit $L \in \mathbb{R}[X]$ tel que $L(U) = V$. Nous avons alors :

$$L(B^2) = L(S) = L(PUP^{-1}) = PL(U)P^{-1} = PVP^{-1} = A$$

Le polynôme $Q(X) = L(X^2)$ est donc solution du problème posé.

Nous en déduisons que $AB = X(A)Q(A) = (XQ)(A) = (QX)(A) = Q(A)A = BA$: A et B commutent.

11.c Soient $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $X \in \mathrm{Ker}\,(S_1 + S_2)$. Alors $S_1X = -S_2X$, et donc $X = 0$ (sinon, on aurait $S_1X > 0$ et $S_2X > 0$). Ainsi, $S_1 + S_2$ est inversible.

11.d Comme A et B commutent, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 = 0$, ce qui donne $A = B$ car $A + B$ est inversible.

12. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et notons $N = \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S}$. Alors :

$$\begin{aligned} N \in \mathrm{ISOM}(N_S) &\iff {}^tNSN = S \\ &\iff {}^t\left(\sqrt{S}\right)\,{}^tM\,{}^t\left(\sqrt{S}\right)^{-1} S \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S} = S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \sqrt{S}\ {}^tM \left(\sqrt{S}\right)^{-1} \left(\sqrt{S}\right)^{2} \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S} = \left(\sqrt{S}\right)^{2}\\
&\iff {}^tM\, M = I_n\\
&\iff M \in O_n(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Comme l'application $M \longmapsto \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S}$ est une bijection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même, nous en déduisons que sa restriction à $O_n(\mathbb{R})$ est une bijection de $O_n(\mathbb{R})$ sur ISOM(N_S) (c'est même un isomorphisme de groupe).

Ainsi, le groupe des isométries d'une norme euclidienne quelconque N est isomorphe au groupe $O_n(\mathbb{R})$, qui est infini.

Remarque : on obtient ce résultat de façon pratiquement immédiate en utilisant une base orthonormale pour N (deux espaces euclidiens de même dimension n sont isomorphes, donc leurs groupes le sont également).

IV. Étude du cardinal de Isom(p)

13.a Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$. Nous avons $u_{\sigma,\varepsilon}(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ avec $y_{\sigma(i)} = x_i\varepsilon_i$ pour tout i. Nous en déduisons, par changement d'indice :

$$N_p(u_{\sigma,\varepsilon}(x)) = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_{\sigma(i)}|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = N_p(x)$$

donc $u_{\sigma,\varepsilon}$ est une p-isométrie.

13.b $u_{\sigma,\varepsilon}(e_1) = e_3$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_2) = e_4$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_3) = -e_1$ et $u_{\sigma,\varepsilon}(e_4) = e_2$ donc la matrice de $u_{\sigma,\varepsilon}$ dans la base (e_i) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14.a Si a ou b est nul, l'inégalité est évidente. Sinon, la fonction ln étant convexe sur $]0, +\infty[$ et les masses $1/p$ et $1/q$ étant positives de somme 1, nous avons

$$\ln ab = \ln a + \ln b = \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \leq \ln\left(\frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{q}\,b^q\right)$$

ce qui donne l'inégalité demandée, par croissance de la fonction ln.

14.b Soient $x, y \in E$. Si x ou y est nul, l'inégalité est une nouvelle fois évidente. Sinon, posons

$$x' = \frac{x}{||x||_p} = (x'_1, \ldots, x'_n) \text{ et } y' = \frac{y}{||y||_q} = (y'_1, \ldots, y'_n).$$

Nous avons en utilisant l'inégalité précédente :

$$\frac{|< x, y >|}{||x||_p\, ||y||_q} = |< x', y' >| \leq \sum_{i=1}^{n} |x'_i|\, |y'_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p}\,|x'_i|^p + \frac{1}{q}\,|y'_i|^q = \frac{1}{p}\,(||x'||_p)^p + \frac{1}{q}\,(||y'||_q)^q = 1$$

14.c Quand $p = 2$, nous obtenons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall\, x, y \in E$, $|< x, y >| \leq ||x||_2\, ||y||_2$.

15. Pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $||u(e_j)||_p = ||e_j||_p = 1$, i.e. $\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^p = 1$, puis en sommant sur j :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^p = n.$$

16.a Σ_q est une partie fermée bornée (c'est la sphère unité pour la norme $||\ ||_q$), elle est donc compacte (E est de dimension finie). Comme l'application $y \longmapsto |< x, y >|$ est continue, elle est bornée sur Σ_q et atteint ses bornes, d'où l'existence du maximum.

16.b Il suffit d'utiliser l'inégalité de Holdër : $|< x, y >| \leq ||x||_p\, ||y||_q = ||x||_p$ pour tout $y \in \Sigma_q$.

Avec le vecteur y_0 donné par l'énoncé, nous avons :

$$< x, y_0 >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ x_i\neq 0}} \underbrace{\varepsilon_i x_i}_{|x_i|} |x_i|^{p-1} ||x||_p^{1-p} = ||x||_p^{1-p} \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ x_i\neq 0}} |x_i|^p = ||x||_p^{1-p} \sum_{1\leq i\leq n} |x_i|^p = ||x||_p$$

en remarquant que ce résultat est correct même si x est nul !

Si x est non nul, y_0 est élément de Σ_q :

$$(||y_0||_q)^q = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ x_i\neq 0}} |x_i|^{(p-1)q}\, (||x||_p)^{(1-p)q} = (||x||_p)^{-p} \sum_{1\leq i\leq n} |x_i|^p = 1$$

et donc $||x||_p = |< x, y_0 >| \leq \max\limits_{y\in\Sigma_q} |< x, y >|$.

Si $x = 0$, on choisit $y_0 = e_1$ et on a encore $y_0 \in \Sigma_q$ et $0 = ||x||_p = |< x, y_0 >| \leq \max_{y\in\Sigma_q} |< x, y >|$.

Nous avons donc démontré que $\max\limits_{y\in\Sigma_q} \ | < x, y > | = ||x||_p$.

Remarque : ceci traduit que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & < x, \cdot > \end{array}$ est une isométrie quand on munit l'espace E de la norme $||\ ||_p$ et l'espace E^* de la norme subordonnée à la norme $||\ ||_q$.

17 Remarquons tout d'abord que, par symétrie entre p et q, nous avons également :

$$\forall y \in E,\ \max_{x\in\Sigma_p} |< x, y >| = ||y||_q.$$

On suppose que u est une p-isométrie. Soit $z \in \Sigma_q$. Nous avons :

$$\forall\, x \in \Sigma_p,\ |< x, u^*(z) >| = |< u(x), z >| \leq \max_{y\in\Sigma_q} |< u(x), y >| = ||u(x)||_p = 1$$

et donc

$$||u^*(z)||_q = \max_{x\in\Sigma_p} |< x, u^*(z) >| \leq 1 \qquad (*)$$

Pour tout $z \in E$, nous avons donc $||u^*(z)||_q \leq ||z||_q$ (l'inégalité est évidente si $z = 0$, et s'obtient en appliquant $(*)$ à $z/||z||_q$ si $z \neq 0$).

Comme $u^{-1} \in \mathrm{Isom}(p)$, nous avons ensuite $||(u^{-1})^*(z)||_q \leq ||z||_q$ pour tout $z \in E$. En appliquant cette inégalité à $u^*(z)$, nous obtenons $||z||_q \leq ||u^*(z)||_q$ pour tout $z \in E$, ce qui achève de prouver que u^* est une q-isométrie.

Comme la matrice de u^* dans la base orthonormale (e_i) est la transposée de A, la question 15 donne (il y a toujours symétrie entre p et q) :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{j,i}|^q = n.$$

18.a Nous avons $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} f(\alpha_k) = 0$ en posant $f(x) = x^p - x^q$ (f est définie sur $[0,1]$, avec par convention $f(0) = 0$). Comme $p \neq q$ (car $p \neq 2$), f est strictement positive sur $]0,1[$ si $p < 2$ et strictement négative sur $]0,1[$ si $p > 2$. La somme des $f(\alpha_k)$ ne peut donc être nulle que si les α_k valent tous 0 ou 1.

18.b Comme $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^p = n = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^q$, nous en déduisons que les $|a_{i,j}|$ ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1.

19 En poursuivant l'analyse, l'égalité $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^p = n$ avec $|a_{i,j}| = 0$ ou 1 signifie que la matrice A contient n coefficients non nuls (valant 1 ou -1) et $n^2 - n$ coefficients nuls. Comme A est inversible, deux coefficients non nuls ne peuvent se trouver sur une même ligne ou sur une même colonne. On en déduit que u est de la forme $u_{\sigma,\varepsilon}$ pour un certain $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et un certain $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$. Avec la question 13, nous avons donc démontré que le groupe des p-isométrie est égal au groupe des permutations signées. Comme l'application $(\sigma,\varepsilon) \longmapsto u_{\sigma,\varepsilon}$ est injective, $\mathrm{Isom}(p)$ est un groupe fini contenant $2^n\, n!$ éléments.