CCP 2006- Epreuve de mathématiques I- Corrigé

Par M. TAIBI Professeur de MP* Lycée Moulay Youssef Rabat Maroc

Exercice 1

a) Si $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$\forall n \geqslant 1,\ u_n > 0, \quad u_n \sim \dfrac{1}{n^3}$ et $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge (série de Reimann)

Donc, par le thm de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge .

On a : $u_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2})$, et donc, par téléscopage , on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_n &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) + \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1})\right) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}) \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Et par suite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

b) La série entière $\sum \dfrac{1}{n!}x^n$ a un rayon de convergence infini et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}x^n = e^x$.

Donc pour tout x, $xe^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)!}x^n$

En particulier pour $x = 2$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}2^n = 2e^2$$

Exercice 2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction paire, 2π-périodique telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0, \pi]$

a) f étant paire, donc $b_n = 0$ pour tout n

$a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x^2 dx = \dfrac{2\pi^2}{3}$

Pour tout $n \geqslant 1, on$ a :
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)dx \overset{IPP}{=} \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[x^2\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi}}_{=0} - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi 2x\sin(nx)dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi 2x\sin(nx)dx \\ &\overset{IPP}{=} \frac{-4}{n\pi}\left[-x\tfrac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^\pi - \underbrace{\frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \cos(nx)dx}_{=0} \\ &= \frac{4(-1)^n}{n^2}\end{aligned}$$

la série de Fourier de f est :

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nx), \qquad x \in \mathbb{R}$$

b) Comme f est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors par le théorème de Dérichlet de convergence normale, la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f, en particulier :

$$\forall x \in [0, \pi],\ x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nx).$$

Pour $x = 0$, on a : $0 = \dfrac{\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2}(-1)^n$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(-1)^n = -\frac{\pi^2}{12}$$

Pour $x = \pi$, on a : $\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2}(-1)^n\cos(n\pi)$, donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Par $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)^2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\pi^2}{6} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$, donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = (\frac{1}{6} - \frac{1}{4.}\frac{1}{6})\pi^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

c) Par le théorème de Parseval, on a :

$$\frac{\pi^2}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{90}$$

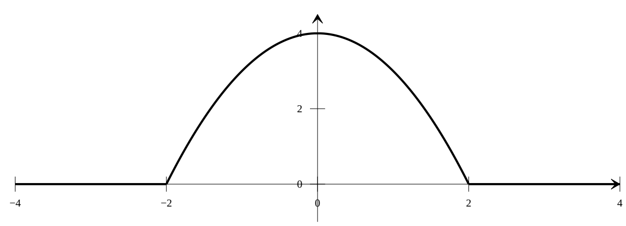
Problème

I- Découverte des fonctions tests

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$,
   $\Rightarrow$) Si A est bornée dans $\mathbb{R}$,alors il existe $r > 0$ tel que $A \subset [-r, r]$, donc $\overline{A} \subset \overline{[-r,r]} = [-r, r]$ et par suite $\overline{A}$ est bornée.
   On sait que $\overline{A}$ est toujours fermée, et puisque $\mathbb{R}$ est de dimension finie, on déduit que $\overline{A}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.
   $\Leftarrow$) Si $\overline{A}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, alors A est bornée dans $\mathbb{R}$ et puisque $A \subset \overline{A}$, on déduit que A est bornée dans $\mathbb{R}$.

2. Quelques exemples :

   a. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application paire telle que :
   $$u(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si\ x \in [0, 2] \\ 0 & si\ x > 2 \end{cases}$$
   Il est clair que l'application u est continue sur $\mathbb{R}$ et que $u(x) \neq 0$ si et seulement si $x \in]-2, 2[$, donc $Supp(u) = [-2, 2]$
   u est donc a support compact, mais u n'est pas une fonction test car u n'est pas dérivable en 2 $\quad (D_g(u)(2) = -4 \neq 0 = D_d(u)(2)\ )$
   Représentation graphique de u :



   b. La fonction sin est une fonction de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, mais son support est non borné car $(x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi)_n$ est une suite de points de support de sin telle que $\lim\limits_{n\infty} x_n = +\infty$. Donc l'application sin n'est pas une fonction test .

3. Soit la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{1}{x}) & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leqslant 0 \end{cases}$

   a. h est C^{∞} sur $\mathbb{R}^*$ (par opérations) avec $h^{(k)}(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$.
   Pour $x > 0$, $h'(x) = \dfrac{1}{x^2}\exp(-\dfrac{1}{x})$, on pose $P_1(X) = X^2$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $h^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x})$ pour tout $x > 0$, alors :
   $$h^{(k+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2}P_k'(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2}P_k(\frac{1}{x})\right)\exp(-\frac{1}{x}) \text{ pour } x > 0$$
   .
   Par le principe de récurrence la suite polynomiale $(P_k)_k$ vérifie : $P_{k+1}(X) = -X^2P_k' + X^2P_k$ et $\deg(P_{k+1}) = \deg(P_k) + 2$.
   Donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{j=0}^{k-1}(\deg(P_{j+1}) - \deg(P_j)) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} 2 = 2k$ et par suite $\deg(P_k) = 2k$ car $\deg(P_0) = 0$ $(P_0 = 1)$
   Conclusion :
   $$\forall x > 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ h^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x})\ \ et\ \deg(P_k) = 2k$$
   La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}^*$ et de plus

$$\lim_{x\to 0^+} h^{(k)}(x) = \lim_{x\to 0^+} P_k(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x})\ +0\ ,\quad \lim_{x\to 0^-} h^{(k)}(x) = 0.$$
par le principe de récurrence, via le théorème du prolongement de la dérivée, on déduit que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $h^{(k)}(0)=0$.

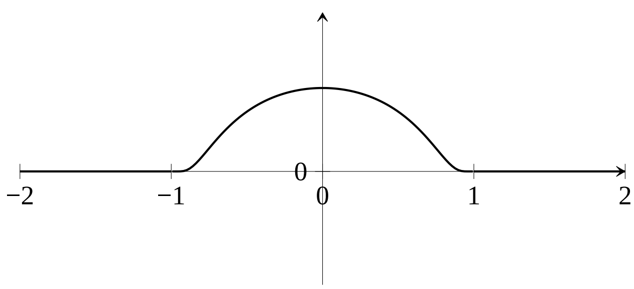
b. La fonction h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas a support compact car $h(x)>0$ pour tout $x>0$, donc h n'est pas une fonction test .
h n'est pas développable en série entière au voisinage de 0 en effet : si h bes développable en série entière sur un voisinage de 0, alors, il existe $r>0$ tel que :
$$\forall x\in]-r,r[,\ \ h(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^{(k)}(0)}{k!}x^k = 0\ \text{ car }\ h^{(k)}(0)=0\ \text{ pour tout }\ k,$$
ce qui est impossible car h n'est pas identiquement nulle sur $]0,r[$.

4. Soit la fonction φ définie par $\varphi(x)=h(-(x+1)(x-1))$

a. Soit $x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)\neq 0 \Leftrightarrow h(-(x+1)(x-1))\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)>0 \Leftrightarrow x\in]-1,1[$, Donc, $\mathrm{Supp}(\varphi)=[-1,1]$.
La fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions de classe C^∞ et puisque son support est compact , l'application est donc une fonction test.
Variations de la fonction φ :

x		-1		+1	
$-(x-1)(x+1)$	-	0	+	0	-
$\varphi(x)$	0		$e^{\frac{1}{(x-1)(x+1)}}$		0

$\varphi'(x) = -2xh'(-(x^2-1))$ où $h'(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}>0$ pour tout $x>0$



b. La fonction $x\to h(-(x-3)(x-8))$ est une fonction test dont le support est $[3,8]$.
La fonction $x\to h(-(x-1)(x-2))+h(-(x-5)(x-6))$ est une fonction test car elle est de classe C^∞ et dont son support est $[1,2]\cup[5,6]$

5. Si une fonction est a support compact, alors celle-ci est nulle au voisinage de ∞, donc de limite nulle à l'infini.

6. Construction d'une suite régularisante :

a. Comme la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ et a support compact (la foction est nulle en dehors de $[-1,1]$), alors φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi=\int\limits_{-1}^{+1}\varphi>0$ car φ est continue et strictement positive sur $]-1,1[$.
Posons $c=\int\limits_{-1}^{+1}\varphi=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi$ et $\rho(x)=\dfrac{1}{c}\varphi(x)$ pour tout x, alors ρ , comme φ , est une fonction test dont le support est $[-1,1]$ et que ρ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ avec $\int\limits_{\mathbb{R}}\rho=\dfrac{1}{c}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi=1$.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $\rho_n(x)=n\rho(nx)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, l'application ρ_n est de classe C^∞ (opérations sur les foctions de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$. De plus
$$\rho_n(x)\neq 0\Leftrightarrow \rho(nx)\neq 0\Leftrightarrow nx\in]-1,1[\Leftrightarrow x\in]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$$
donc $Supp(\rho_n)=[-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}]$.
La fonction ρ_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int\limits_{R}\rho_n = n\int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\rho(nx)dx=\int\limits_{-1}^{1}\rho(t)dt=1$.
En conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, ρ_n est une fonction test et que $\int\limits_{\mathbb{R}}\rho_n=1$.

II- Approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ par des fonctions de classe C^∞ ou par des fonctions tests

7. **L'approximation polynomiale ne convient plus**
Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions plynomiales qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ tout entier .

a. Soit $\varepsilon = 1 > 0$, comme $(p_n)_n$ est de Cauchy pour la norme de convergence uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que : $\forall n,\ m \in \mathbb{N},\ n \geqslant m \geqslant N \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_m(x)| \leqslant \varepsilon = 1$. En particulier pour $m = N$, on a le résultat demandé .

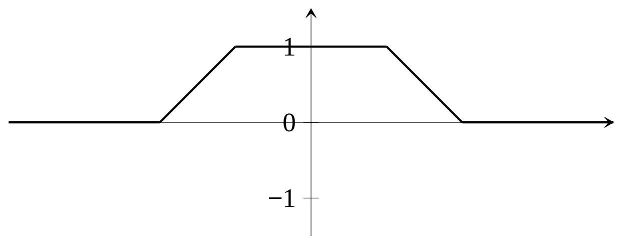
Pour $n \geqslant N$, la fonction poynomiale $P_n - P_n$ est bornée sur $\mathbb{R}$, donc constante, et par suite $\deg(P_n - P_N) \in \{-\infty, 0\}$.

b. D'après la question 7.a), il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant N,\ \exists C_n \in \mathbb{R}$; $\quad \forall x \in R,\ P_n(x) - P_N(x) = C_n$. Comme la suite $(P_n)_n$ converge simplement vers f sur, il en résulte que la suite $(C_n)_n$ converge. Si $C = \lim\limits_n C_n$, alors $C = \lim\limits_n C_n = \lim\limits_n (P_n(x) - P_N(x)) = f(x) - P_N(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et par suite $f(x) = P_N(x) + C$ pour tout x.
Conclusion : $f = P_N + C$ est donc une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$.

8. Approximation d'une fonction continue à l'infini par une suite de fonctions continues à support compact :
Pour $n \in \mathbb{N}$, $\ z_n$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ paire telle que :

$$z_n(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0, n[\\ -x + n + 1 & si\ x \in [n, n+1[\\ 0 & si \text{ x} \in [n+1, +\infty[\end{cases}$$

a. Représentation garphique de z_n :



Limite simple de la suite (z_n) :
Comme z_n est paire pour tout entier n, il suffit d'étudier la convergence pour $x \geqslant 0$.
Soit $x \geqslant 0$, pour tout entier $n \geqslant E(x) + 1$, on a alors $x \in [0, n[$ et par suite $z_n(x) = 1$ et donc $\lim\limits_n z_n(x) = 1$.
En conclusion : la suite de fonctions $(z_n)_n$ converge simplement vers la fonction constante 1 .
La convergence de la suite n'est pas uniforme, car pour $x_n = n + 1$, on a $|z_n(x_n) - 1| = 1$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'infini
Montrons que g est bornée sur $\mathbb{R}$:
Soit $\varepsilon = 1 > 0$, comme $\lim\limits_{|x| \to +\infty} g(x) = 0$, il existe $a > 0$ tel que : $\forall x \in R,\ |x| \geqslant a$ on a $|g(x)| \leqslant 1$, donc g est bornée sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.
g étant continue sur $\mathbb{R}$, en particulier g est continue sur le compact $[-a, a]$ et par suite g est bornée sur $[-a, a]$
En conclusion : g est bien bornée sur $\mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\alpha_n = \sup\limits_{|x| \geqslant n} |g(x)|$

c. Etude de la monotonie de la suite $(\alpha_n)_n$:
Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $\{|g(x)|\,,\ |x| \geqslant n + 1\ \} \subset \{|g(x)|\,,\ |x| \geqslant n\}$, il en résulte que

$$\alpha_{n+1} = \sup\{|g(x)|\,, |x| \geqslant n + 1\} \leqslant \sup\{|g(x)|\,, |x| \geqslant n\} = \alpha_n.$$

Donc la suite $(\alpha_n)_n$ est monotone décroissante .De plus $(\alpha_n)_n$ est minorée par 0, donc converge dans $\mathbb{R}$.
Montrons que $\lim\limits_n \alpha_n = 0$:
soit $\varepsilon > 0$, puisque $\lim\limits_{|x| \to +\infty} g(x) = 0$, il exite $c > 0$ etl que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant c,\ |g(x)| \leqslant \varepsilon$
En particulier pour $n \geqslant c$, on a : $\forall x,\ |x| \geqslant n \Rightarrow |g(x)| \leqslant \varepsilon$ et par suite pour tout $n \geqslant c$, $0 \leqslant \alpha_n = \sup\limits_{|x| \geqslant n} |g(x)| \leqslant \varepsilon$.
En définitive :

$$\lim_n \alpha_n = 0.$$

d. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = g z_n$:
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) - g_n(x) = g(x)(z_n(x) - 1)$, et que pour $x \geqslant 0$, $z_n(x) - 1 = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0, n] \\ -x + n & si\ x \in [n, n+1[\\ -1 & si\ |x| \geqslant n + 1 \end{cases}$ (on n'oublie pas que la fonction z_n est paire).
D'autre part $\|g_n - g\|_\infty \quad = \max(\sup_{x \in [-n,n]} |g(x) - g_n(x)|\,, \sup_{|x| \geqslant n} |g(x) - g_n(x)|)$
$\qquad = \sup_{|x| \geqslant n} |g(x) - g_n(x)|$ car $g(x) - g_n(x) = 0$ pour $x \in [-n, n]$
Mais pour

$$|x| \geqslant n, |g(x) - g_n(x)| = |g(x)|\,|z_n(x) - 1| \leqslant |g(x)|\,(|z_n(x)| + 1) \leqslant \alpha_n\,(|z_n(x)| + 1) \leqslant 2\alpha_n.$$

En conclusion :

$$\|g_n - g\|_\infty \leqslant 2\alpha_n.$$

e. Comme la suite $(\alpha_n)_n$ converge vers 0 (indépendement de x), il en résulte, d'après l'inégalité précèdente, que $(g_n)_n$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$ tout entier.De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ de support $[-n-1, n+1]$ qui est compact.
En conclusion : Toute fonction g continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'infini est limùite uniforme de suite de fonctions continue sur $\mathbb{R}$ à support compact .
f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et g continue sur $\mathbb{R}$ et à support compact :

$$\exists R > 0, \quad Supp(g) \subset [-R, R]$$

9. Convolution :

a. Pour x un réel fixé, l'application $t \mapsto g(t)f(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (par opérations) et nulle sur $]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$, donc intégrable sur $\mathbb{R}$.
On pose $g * f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)dt$

b. Pour x fixé, l'application $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et nulle sur $]-\infty, -R-x[\cup]R-x, +\infty[$, donc intégrable sur $\mathbb{R}$.
On note $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$.
On fait le changement de variable $t \mapsto u = x - t$ qui est un C^1-différomorphisme , dans l'intégrale $f * g(x)$, on aura :

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u)(-du) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)du = g * f(x). \end{aligned}$$

10. Support d'une convolution :

a. Ici on suppose de plus que f est à support compact : $\exists S > 0$ tel que $Supp(f) \subset [-S, S]$
Si $x > S + R$, alors $(f * g)(x) = \int\limits_{-S}^{S} f(t)g(x-t)dt$ car f est nulle en dehors de $[-S, S]$. Si $t \in [-S, S]$, alors $x - t \in [-S + x, S + x]$ et comme $x > R + S$, on a $x - t > R + \underbrace{S - t}_{\geqslant 0} \geqslant R$, donc $g(x-t) = 0$ et par suite $(f * g)(x) = 0$.
Si $x < -R - S$, alors $(f * g)(x) = (g * f)(x) \int\limits_{-R}^{R} f(x)g(t)dt$ car $g$est nulle en dehors de $[-R, R]$ S $t \in [-R, R]$, alors $x - t \in [-R + x, R + x]$ et comme $x < -R - S$, on a $x - t < -R - \underbrace{S - t}_{\leqslant 0} \leqslant -S$, donc $f(x-t) = 0$ et par suite $(f * g)(x) = 0$.

En conclusion : $f * g$ est à support compact .

b. Supposons f n'est pas à support compact, montrons que $f * g$ n'est pas necessairement a support comapct.
Prendre par exemple g positive non ulle et $f = 1$.

11. Dérivation d'une convolution :

a. Soit a un réel strictement positif et $x \in [-a, a]$, on a :
$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int\limits_{-R}^{R} f(x-t)g(t)dt$ car g est nulle en *dehors* de $[-R, R]$.
Avec le chagement de variable affine $t \to u = x - t$, on a : $f * g(x) = -\int\limits_{x+R}^{x-R} f(u)g(x-u)du = \int\limits_{x-R}^{x+R} f(u)g(x-u)du$.
Pour $u \in [-a-R, x-R[$, on a : $-u > R - x$ et puis $x - u > R$, donc $g(x-u) = 0$.
De même pour $u \in]x+R, a+R]$, on a : $-u < -x - R$ et puis $x - u < R$, donc $g(x-u) = 0$
En concluison :

$$f * g(x) = \int\limits_{x-R}^{x+R} f(u)g(x-u)du = \int\limits_{-a-R}^{a+R} f(u)g(x-u)du.$$

b. On suppose de plus que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{R} \times [-a-R, a+R] & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & f(t)g(x-t) \end{array}$$

est continue et admet une dérivée partielle par rapport à x : de plus l'application $(x,t) \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t) = f(t)g'(x-t)$ qui est continue sur $\mathbb{R} \times [-a-R, a+R]$, donc par le théorème de dérivation sous le signe

intgrale, la fonction $f*g$ est de classe C^1 et $(f*g)'(x) = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g'(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g'(x-t)dt$ car g' est aussi a support compact avec $Supp(g') \subset [-R,R]$ (g est toujours nulle en dehors de $[-R,R]$, donc aussi g'...).
En conclusion : $(f*g)' = f*g'$.
Par le principe de rédurence on démontre que si g est calsse C^∞ alors $f*g$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $(f*g)^{(k)} = f*g^{(k)}$ pour tout entier k.

12. Application à l'approximation :

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f*\rho_n(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\rho_n(tdt - f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\rho_n(tdt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_n(t)dt \text{ car } \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)dt = 1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x-t) - f(x)\right)\rho_n(tdt \\ & \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left(f(x-t) - f(x)\right)\rho_n(tdt \text{ car } Supp(\rho_n) = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \end{aligned}$$

D'où $|f*\rho_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left(f(x-t) - f(x)\right)\rho_n(tdt \right| \leqslant \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x-t) - f(x)|\,\rho_n(tdt.$

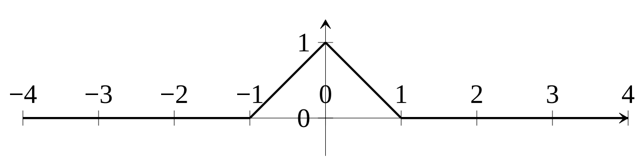
b. On suppose ici f est de plus uniformément continue, soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que : $\forall y, z \in R$, $|y-z| \leqslant \eta \Rightarrow |f(y) - f(z)| \leqslant \varepsilon$ (*).
Posons $n_0 = E(\eta) + 1 \geqslant 1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant n_0$, et pour tous $x \in \mathbb{R}$, $t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, on a : $|(x-t) - x| = |t| \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \eta$ et par $(*)$, on déduit que $|f(x-t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
Doù $|f*\rho_n(x) - f(x)| \leqslant \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x-t) - f(x)|\,\rho_n(tdt \leqslant \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \rho_n(tdt = \varepsilon$ pour tout x et tout entier $n \geqslant n_0$.
En conclusion : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $|f*\rho_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ c'est à dire la suite de fonctions $(f*\rho_n)_{n\in N^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f .

c. Soit f une fonction continue sur R a support compact.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f*\rho_n$ est aussi a support compact (question 10) et comme ρ_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (Questions 4 et 6), on a $f*\rho_n$ est une fonction de classe C^∞ sur R et par suite $f*\rho_n$ est une fonction test. La fonction f est nulle a l'infini, car f est support compact, donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Par la question 12 , la suite de fonction $(f*\rho_n)_{n\geqslant 1}$ converge unformément vers f sur R.

III. Théorème de Whitney

13. Soit f une fonction de classe C^∞ sur R, posons $Z(f) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\}$ ensemble des zeros de f .
On a alors $Z(f) = f^{-1}\{0\}$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une fonction continue .

14. Une première tentative de preuve...infructueuse
Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$.
Cherchons $Z(d_F)$ où $d_F(x) = d(x,F)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in Z(d_F) \Leftrightarrow d(x,F) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{F} = F$ car F est fermée, donc $Z(d_F) = F$.
Si l'application d_F est C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors le théorème de Witney est démontré.
Représentation de d_F dans le cas de $F =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$:
on a $d_F(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad x \in [0,1] \\ x+1 & si \quad x \in [-1,0[\\ 0 & \quad\quad \text{ailleurs} \end{cases}$



d_F ne vérifie la propriété car d_F n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$, donc d_F n'est pas de classe C^∞ .

15. Utilisation de foction test

i) On suppose que F est le complémentaire de $]a,b[$ avec $a < b$, donc $F =]-\infty,a] \cup [b,+\infty[$:
On considère la fonction f telle $f(x) = h(-(x-a)(x-b))$ où h est la fonction définie dans la question 3, alors f est une fonction test (f est de classe C^∞ et a support compact : $Supp(f) = [a,b]$), avec $Z(f) = F$. Donc le théorème est démontré .

ii) On suppose que F est le complémentaire de $]a,b[\cup]c,d[$ avec $a<b<c<d$:
On considère la fonction f telle $f(x)=h(-(x-a)(x-b))+h(-(x-c)(x-d))$ où h est la fonction définie dans la question 3, alors f est une fonction test (f est de classe C^{∞} et a support compact : $Supp(f)=[a,b]\cup[c,d]$), avec $Z(f)=F$. Donc le théorème est démontré .

16. Démontrons le Théorème dans le cas général :
Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$, notons par Ω le complémentaire de F dans $\mathbb{R}$, alors Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $(]a_k,b_k[)_{k\in I}$ une partion de Ω, où I est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $a_k<b_k$ pour tout k, on a : $\Omega=\bigcup\limits_{k\in I}]a_k,b_k[$.
Si I est fini, la fonction f telle que $f(x)=\sum\limits_{k\in I}h(-(x-a_k)(x-b_k))$ pour tout x, est une fonction de classe C^{∞} a support compact($Supp(f)\subset\bigcup\limits_{k\in I}[a_k,b_k]$.) avec $Z(f)=F$. Donc la théorème est démonté.
Si I est infini, on se ramène à $I=\mathbb{N}$ et on considère la fonction

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}h_k \quad \text{où} \quad h_k(x)=h(-(x-a_k)(x-b_k)) \text{ pour tout } x,$$

on a : f est de classe C^{∞} et que $Z(f)=F$.