Endomorphismes cycliques

Mohamed Ait Lhoussain

29 mars 2015

Table des matières

1 Notations

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de tel que $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$ avec $n \geq 2$. Pour tout $a = (a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, on adoptera les notations suivantes :

1. P_a est le polynôme : $P_a = X^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
2. C_a est la matrice :

$$C_a = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

La matrice C_a est appelée la matrice compagne du polynôme P_a.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est :

$$\chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u).$$

2 Préléminaire

2.1 Commutant

Definition 2.1 *On dit qu'un endomorphisme v commute avec u si $u \circ v = v \circ u$. On note $C(u)$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u.*

Proposition 2.2 *$C(u)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$.*

Proposition 2.3 *Soit $\mathbb{K}[u] = \{P(u)/P \in \mathbb{K}[X]\}$ Alors $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre de l'algèbre $C(u)$ est une sous-algèbre*

Proposition 2.4 *Pour tout endomorphisme u de E, on a $\deg(\mu_u) = \dim(\mathbb{K}[u])$, où μ_u est le polynôme minimal de u.*

Preuve Notons $m = \deg(\mu_u)$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. La division euclidienne de P par μ_u donne $P = Q\mu_u + R$ avec $\deg(R) \leq m-1$, donc $R = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k X^k$ avec $\alpha_0, \cdots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{K}$. Donc

$$P(u) = R(u) \in \mathrm{Vect}\{u^k/k \in [\![0, m-1]\!]\}.$$

Donc, la famille $\mathscr{U} = (u^k)_{0 \leq k \leq m-1}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[u]$. Démontrons que $\mathscr{U}$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E)$. Soit $(\beta_0, \beta_{m-1}) \in \mathbb{K}^m$ tel que $\sum_{k=0}^{m-1} \beta_k u^k = 0$, alors $p(u) = 0$ où $P = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k X^k$. Si $P \neq 0$ donc $P = 0$ car le polynôme minimal μ_u est de degré m. D'où $\beta_0 = \cdots = \beta_{m-1} = 0$. Ainsi $\mathscr{U}$ est une base de $\mathbb{K}(u]$ est $\dim(\mathbb{K}(u]) = m$. ∎

Proposition 2.5 *On a $\dim(\mathbb{K}[u]) \leq \dim(E) \leq \dim(C(u))$*

Preuve La seule inégalité non évidente est la dernière.
Il suffit de le prouver pour une matrice $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
• Premier cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la matrice A est trigonalisable, par suite $A = PTP^{-1}$ où P est une matrice inversible. Soit $C_{\text{sup}}(T)$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures complexes qui commutent avec T. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et sa dimension est supérieure ou égale à n car $T' \in C_{\text{sup}}(T)$ si et seulement si $(TT')_{ij} = (T'T)_{ij}$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tel que $i < j$ puisque l'égalité est réalisée pour les termes diagonaux et ceux d'en dessous de la diagonale. ainsi $C_{\text{sup}}(t)$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire à $\frac{n(n-1)}{2}$ équations et $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues, donc sa dimension est supérieure à la différence : $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$. Il est aisé de voir que $C_{\text{sup}}(T) \sim PC_{\text{sup}}(T)P^{-1} \subset \mathcal{C}(M)$. Donc $\dim(\mathcal{C}(M)) \geq n$.
• Deuxième cas : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la matrice A peut être considérée complexe et on a d'après ce qui precede si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices complexes qui commutent avec A

considéré comme $\mathbb{C}$ espace vectoriel on a $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}) \geq n$. or considéré comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel on a

$$(\star) \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}) \geq 2n$$

Or en notant $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}$ on a $\tilde{\mathcal{S}}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. On a la somme directe d'espaces vectoriels réels :

$$\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}} \oplus i\tilde{\mathcal{S}}$$

En effet si $X \in \mathcal{S}$ alors $XA = AX$, donc $\overline{AX} = \overline{XA}$ et comme A est réelle, on a $A\overline{X} = \overline{X}A$, donc $\overline{X} \in \mathcal{S}$. On vient de montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{S}, \overline{X} \in \mathcal{S}$$

On peut écrire $X = X_1 + iX_2$ avec $X_1 = \frac{X+\overline{X}}{2}$ et $X_2 = \frac{X-\overline{X}}{2i}$. On voit bien que $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{S}}$. Ainsi on a $\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}} + i\tilde{\mathcal{S}}$, et comme l'intersection des deux termes est $\{0\}$, la somme est directe. Compte tenu de $\dim(\tilde{\mathcal{S}}) = \dim(i\tilde{\mathcal{S}})$, on a donc :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}) = \dim_{\mathbb{R}}(\tilde{\mathcal{S}})$$

Il en résulte, compte tenu de $(\star)$ ci-dessus que :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\tilde{\mathcal{S}}) \geq n$$

Or $\tilde{\mathcal{S}} \subset \mathcal{C}(A)$, d'où $\dim(\mathcal{C}(A)) \geq n$. ■

2.2 Polynôme minimal d'un vecteur suivant un endomorphisme

Pour tout $x \in E$, on pose $\mathscr{I}_{u,x} = \{P \in \mathbb{K}[X]/P(u)(x) = 0\}$. Il est aisé de voir que $\mathscr{I}_{u,x}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. On a $\mu_u \in \mathscr{I}_{u,x}$, donc l'idéal $\mathscr{I}_{u,x}$ est non nul. Il existe, en conséquence, un polynôme unitaire unique $\mu_{u,x}$ tel que

$$\mathscr{I}_{u,x} = \mathbb{K}[X]\mu_{u,x}$$

Comme $\mu_u \in \mathscr{I}_{u,x}$, on a $\mu_{u,x}|\mu_u$. On va démontrer ci-dessous qu'il existe x dans E tel que $\mu = \mu_{u,x}$.

Lemme 2.6 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$. Si $E_1, \cdots, E_m$ sont des sous-espaces vectoriels de E tel que $\bigcup_{k=1}^{m} E_k = E$ alors il existe $\ell \in [\![1, m\}]\!]$ tel que $E_\ell = E$.*

Preuve Par récurrence sur m. Si $m = 1$ rien à démontrer, si $m = 2$ alors si E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E tel que $E_1 \cup E_2 = E$, si $E_1 \neq E$ et $E_2 \neq E$ on aurait des éléments $x, y \in E$ tel que $x \notin E_1$ et $y \notin E_2$. On a $x+y \in E$ et $E = E_1 \cup E_2$, donc $x + y \in E_1$ ou $x + y \in E_2$. Si $x + y \in E_1$, comme $y \notin E_2$, on a $y \in E_1$, donc $y \in E_1$ et $x + y \in E_1$, donc $x \in E_1$. Si $x + y \in E_2$, comme $x \in E_2$, on a $y \in E_2$, absurde.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour toute famille de sous-espaces vectoriels $E_1, \cdots, E_n$ si

$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = E$ alors il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $E_j = E$. Soit $E_1, \cdots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tel que $\bigcup_{k=1}^{n+1} E_k = E$. Pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, notons $E'_j = \bigcup_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n+1} E_k$. Si on démontre que :

$$(1) \quad \exists j \in [\![1, n+1]\!] \quad E_j = E \quad \text{ou} \quad E_j \subset E'_j$$

on aura terminé car si $E_j = E$ pour un $j \in [\![1, n+1]\!]$, alors c'est clair que $\bigcup_{k=1}^{n+1} E_k = E$. Si $E_j \subset E'_j$ pour un certain j alors quitte à permuter j et $n+1$ si nécessaire est, on peut se ramener à $j = n+1$, c'est-à-dire $E_{n+1} \subset \bigcup_{j=1}^{n} E_k$, donc $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = E$ et par hypothèse de récurrence, on a $E = E_i$ pour un certain $i \in [\![1, n]\!]$.
Démontrons (1) ci-dessus par l'absurde. Sinon on aurait pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$ il existe $(x_j, y_j) \in E^2$ tel que $x_j \notin E_j$ et $y_j \in E_j$ et $y_j \notin E'_j$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $z_k = x_1 + ky_1$. Comme (z_k) est une suite infinie , il existe au moins un $\ell \in [\![1, n+1]\!]$ et $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $p \neq q$ et $z_p, z_q \in E_\ell$. Donc $(p-q)y_1 \in E_\ell$, d'où $y_1 \in E_\ell$. Comme $y_1 \in E'_1$ on a forcément $\ell = 1$. Ainsi $z_q \in E_1$ et $y_1 \in E_1$, donc $x_1 \in E_1$, ce qui contredit la définition de x_1. ∎

Proposition 2.7 *Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, il existe $x \in E$ tel que $\mu_u = \mu_{u,x}$.*

Preuve Partant de la remarque donnée ci-dessus, à savoir $\mu_{x,u}|\mu$ pour tout $x \in E$, et comme μ_u n'a qu'un nombre fini de diviseurs, l'ensemble $X = \{\mu_{u,x}/x \in E\}$ est fini. Notons $p = \mathrm{card}(X)$ et $X = \{\mu_{u,x_j}/j \in [\![1, p]\!]\}$.
On a $E = \bigcup_{j=1}^{p} \ker \mu_{u,x_j}(u)$ car si $x \in E$, alors $\exists j \in [\![1, p]\!], \mu_{u,x_j} = \mu_{u,x}$, or $\mu_{u,x}(u)(x) = 0$, donc $\mu_{u,x_j}(u)(x) = 0$ et $x \in \ker \mu_{u,x_j}(u)$. D'après le lemme 2.6, il existe $\ell \in [\![1, p]\!]$ tel que $E = \ker \mu_{u,x_\ell}(u)$, ce qui signifie que $\mu_{u,x\ell}$ est un polynôme annulateur de u, donc $\mu_u|\mu_{u,x_\ell}$ et comme on a déjà remarqué que $\mu_{u,x_\ell}|\mu_u$ on a : $\mu_{u,x_\ell} = \mu_u$. ∎

3 Endomorphismes cycliques

3.1 Définition, caractérisations

Definition 3.1 *Un endomorphisme cyclique de E est un endomorphisme u tel qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\mathscr{B}_x = (x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.*

Le théorème 3.2 ci-dessous nous donne autres caractérisations de tels endomorphismes.

Théorème 3.2 *Soit u une endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe $x \in E$ *tel que* $\mathscr{B}_{u,x} = (x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ *est une base de* E*.*

(2) Il existe une base $\mathscr{B}$ *de* E *et* $a = (a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ *tel que* $\underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}} u = C_a$*.*

(3) $\dim(\mathbb{K}[u]) = n$

(4) $\deg(\mu_u) = n$

(5) $\mu_u = \chi_u$

(6) $\mathbb{K}[u] = C(u)$

Preuve (1) $\Rightarrow$ (2) : Supposons (1) et soit $\mathscr{B} = (e_0, \cdots, e_{n-1})$ définie par $e_k = u^k(x)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors :

$$(\star) \quad \forall k \in [\![0, n-2]\!] \quad u(e_k) = e_{k+1}$$

Par ailleurs $u(e_{n-1}) = u^n(x) \in E$ donc il existe $a = (a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$(\star)' \quad u(e_{n-1}) = u^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_k.$$

Compte tenu de $(\star)$ et $(\star)'$, on a $\underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}}(u) = C_a$. (2) $\Rightarrow$ (1), Supposons qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_0, \cdots, e_{n-1})$ de E tel que $\underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}}(u) = C_a$ où $a = (a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Alors $\forall k \in [\![0, n-2]\!] \quad u(e_k) = e_{k+1}$, ce qui signifie que $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{u,e_0}$. Ainsi (1) est réalisée. Remarquons qu'en vertu de la proposition 2.4, on a (3) , et comme $\mu_u | \chi_u$ et $\deg(\chi_u) = n$ et μ_u et χ_u sont unitaires, on a (4) $\Leftrightarrow$ (5). Nous allons démontrer que (1) $\Leftrightarrow$ (4) Supposons que l'on a (1), donc il existe $a = (a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $u^n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x)$, donc $P_a(u)(x) = 0$ (rappelons que $P_a = X^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$) On va démontrer que $P_a = \mu_u$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors :$P_a(u)(u^k(x)) = u^k(P_a(x)) = 0$, donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!], P_a(u)(u^k(x)) = 0$, ce qui signifie que l'endomorphisme $P_a(u)$ s'annule sur tous les vecteurs de la base $\mathscr{B}_{u,x}$, donc $P_a(u) = 0$. Soit P un polynôme annulateur de u et R le reste de la division euclidienne de P par P_a alors $R(u) = 0$ et R s'écrit $R = \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k X^k$, en particulier, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x) = 0$$

donc $b_0 = \cdots = b_{n-1} = 0$ par liberté de la famille $\mathscr{B}_{u,x}$. Ainsi $P_a | P$, donc $P_a = \mu_u$. Réciproquement, supposons que l'on a (4) , donc $\deg(\mu_u) = n$ et posons $\mu_u = P_a$ avec $a = (a_0, \cdots, a_{n-1})$. D'après la proposition 2.7, il existe $x \in E$ tel que $\mu_u = \mu_{u,x}$, Donc la famille $\mathscr{B}_{u,x}$ est une base, d'où (1). Pour terminer on va prouver que (1) $\Rightarrow$ (6) et (6) $\Rightarrow$ (4). Supposons que (1) est vraie. On sait que $\mathbb{K}[u] \subset C(u)$. Réciproquement, soit $f \in C(u)$, donc $f \circ u = u \circ f$, donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, u^k \circ f = f \circ u^k$$

On a $f(x) \in E$ donc $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x)$ où $b = (b_0, \cdots, b_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Posons $P = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$. On va démontrer que $f = P(u)$, pour cela il suffit de prouver que ces deux endomorphismes coincident sur les vecteurs de la base $\mathscr{B}_{u,x}$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a $P(u)(u^k(x)) = u^k(P(u)(x)) = u^k(f(x)) = f(u^k(x))$ donc $\mathbb{K}[u] = C(u)$ Réciproquement, supposons que l'on a (6) donc $\mathbb{K}[u] = C(u)$. Or en vertu de la proposition 2.5 on a

$$n \leq \dim(C(u)) \leq \dim \mathbb{K}[u] \leq n$$

Il en découle que

$$n \leq \dim(C(u)) = \dim \mathbb{K}[u] \leq n$$

en particulier $\dim(\mathbb{K}[u]) = n$ donc $\deg(\mu_u) = n$. Ainsi on a prouvé que (6) $\Rightarrow$ (4).
■

3.2 Deux cas particuliers

Grace au théorème 3.2 ci-dessus, on voit tout de suite que u est un endomorphisme cyclique dans les deux cas suivants :

1. u possède n valeurs propres deux à deux distinctes.
2. u nilpotent d'indice de nilpotence n

Nous allons donner une démonstration indépendante dans ces deux cas.

Proposition 3.3 *Soit u un endomorphisme de E alors u est cyclique dans chacun des cas suivants :*

1. u possède n valeurs propres deux à deux distinctes.

2. u nilpotent d'indice de nilpotence n

Preuve Si on veut utiliser le théorème il suffit de remarquer que dans ces deux cas on a $\chi_u = \mu_u$.
Voici une démonstration directe indépendante du théorème 3.2.
• Supposons u possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ et soit $e_1, \cdots, e_n$ des vecteurs propres associés , donc $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E. Soit $e = \sum_{k=1}^{n} e_i$ alors, avec $\mathscr{B}_{u,e} = (e, u(e), \cdots, u^{n-1}(e))$, on a :

$$\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}_{u,e} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

de sorte que $\mathscr{B}_{u,e}$ est une base de E et par suite, par définition, u est cyclique.
• Supposons que u est nilpotent d'indice de nilpotence n, alors $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$,

donc il existe $e \in E$ tel que $u^{n-1}(e) \neq 0$. Alors $\mathscr{B}_{u,e} = (e, u(e), \cdots, u^{n-1}(e))$ est une base de E car $\mathscr{B}_{u,e}$ est libre car si

$$(\star\star) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(e) = 0$$

on a en appliquant l'endomorphisme u^{n-1} à l'égalité $(\star\star)$: $\alpha_0 u^{n-1}(e) = 0$ donc $\alpha_0 = 0$ puisque $u^{n-1}(e) \neq 0$. Supposons que $j \in [\![0, n-2]\!]$ et $\alpha_k = 0, \forall k \in [\![0, j]\!]$, il vient :

$$(\star\star\star) \quad \sum_{k=j+1}^{n-1} \alpha_k u^k(e) = 0$$

En appliquant à $(\star\star\star)$ l'endomorphisme u^{n-j-2} on obtient de la même façon que ci-dessus : $\alpha_{j+1} = 0$. ∎

3.3 Cas particulier où $\dim(E) = 2$

Dans le cas particulier d'un plan vectoriel on va voir qu'un endomorphisme est soit une homothétie soit un endomorphisme cyclique, pour cela on va utiliser le lemme suivant :

Lemme 3.4 *Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel quelconque et u un endomorphisme de E, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) u est une homothétie de E.

(2) Pour tout $x \in E$ la famille $(x, u(x))$ est liée

Preuve Si E est nul il n'y a rien à démontrer .
Si E n'est pas nul le sens $(1) \Rightarrow (2)$ est évident. Pour l'autre sens, soit x_0 un vecteur non nul de E. Comme $x_0, u(x_0))$ est liée et $x_0 \neq 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u(x_0) = \alpha x_0$. Soit $x \in E$: si (x, x_0) est liée soit $\lambda \in K$ tel que $x = \lambda x_0$ alors $u(x) = \lambda u(x_0) = \lambda\alpha x_0 = \alpha u(x_0)$.
Si (x, x_0) est libre alors $y = x + x_0 \neq 0$, comme $(y, u(y)$ est liée il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $u(y) = \mu y$ donc, compte tenu du fait que $(x, u(x))$ est liée donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$, on a :

$$u(y) = \mu(x + x_0) = u(x_0) + u(x) = \alpha x_0 + \lambda x$$

et par liberté de (x, x_0) on a $\lambda = \mu$ et $\lambda = \mu$, donc $\alpha = \lambda$. ∎

Proposition 3.5 *Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension 2. Soit u un endomorphisme de E alors soit u est un endomorphisme cyclique soit u est une homothétie.*

Preuve S'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x))$ est libre alors par définition et compte tenue que $(x, u(x))$ est une base de E l'endomorphisme u est cyclique. Sinon, par le lemme 3.4, l'endomorphisme u est une homothétie. ■

Corollaire 3.6 *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ alors soit $A = \lambda I_2$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ soit $A \simeq \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$ où $\delta = \det(A)$ et $\tau = tr(A)$.*

Preuve Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Par la proposition 3.5, u est une homothétie dans $A = \alpha I_n$ où λ est le rapport de u où u est cyclique donc il existe une base $\mathscr{B}$ de E tel que :

$$\operatorname*{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

Or $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(u) = b$ et $\det(A) = \det(u) = -a$, ce qui prouve le résultat du corollaire 3.6. ■

3.4 Propriétés topologiques

Théorème 3.7 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie non nulle et $\mathscr{L}_{\mathrm{cy}}(E)$ l'ensemble des endomorphismes cycliques de E, alors $\mathscr{L}_{\mathrm{cy}}(E)$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$.*

Preuve Soit $\mathscr{B}$ une base fixée de E. On peut dire que

$$\mathscr{L}_{\mathrm{cy}}(E) = \bigcup_{x \in E} O_x$$

avec

$$O_x = \{u \in E / \det_{\mathscr{B}}(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x)) \neq 0\}$$

Donc $O_x = \psi_x^{-1}(\mathbb{K}^*)$ où ψ_x est l'application de $\mathscr{L}(E)$ vers $\mathbb{K}$ tel que :

$$\forall u \in \mathscr{L}(E) \quad \psi_x(u) = \det_{\mathscr{B}}(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$$

l'application ψ_x est continue sur $\mathscr{L}(E)$ car $u \mapsto (\mathrm{Id}_E, u, \cdots, u^{n-1})$ est continue et $v \mapsto v(x)$ est continue sur $\mathscr{L}(E)$ car linéaire.
Ainsi $\mathscr{L}_{\mathrm{cy}}(E)$ est une réunion d'ouverts, donc un ouvert de $\mathscr{L}(E)$. ■

Théorème 3.8 *Soit E un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{C}$, de dimension finie non nulle et $\mathscr{L}_{\mathrm{cy}}(E)$ l'ensemble des endomorphismes cycliques de E, alors $\mathscr{L}_{\mathrm{cy}}(E)$ est dense dans $\mathscr{L}(E)$.*

Preuve Il suffit de remarquer que l'ensemble des endomorphisme ayant n valeurs propres deux à deux distinctes des dense dans $\mathscr{L}(E)$ et qu'il est contenu dans $\mathscr{L}_{\mathrm{cy}}(E)$.
■