Décomposition de Dunford

Ait Lhoussain Mohamed

15 janvier 2014

1 Lemmes préléminaires

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension non nulle finie ν. On suppose que $E = \overset{s}{\underset{k=1}{\oplus}} E_k$, avec $s \in \mathbb{N}^*$ et E_k des sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives ν_k supposées non nulles.
- Si u et v sont deux endomorphismes la notation uv désigne le composé $u \circ v$.
- Si u est un endomorphisme de E tel que les E_k sont $u-$ stables, on note u_k l'endomorphisme de E_k induit par u. Par conséquent $u_k : E_k \to E_k$ et $u_k(x) = u(x)$ pour tout $x \in E_k$. On désigne par π_k la projection de E sur E_k parallèlement à $\widetilde{E_k} = \overset{s}{\underset{\substack{j=1\\ j\neq k}}{\oplus}} E_j$.

- Finalement, pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, on pose $\widetilde{u}_k = u\pi_k$
Ainsi l'endomorphisme $\widetilde{u}_k$ réalise :

$$(\forall j \in [\![1, s]\!])(\forall x \in E_j) \quad \widetilde{u}_k(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad j \neq k \\ u_k(x) = u(x) \quad \text{si} \quad j = k \end{cases}$$

Lemme 1 *Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que les F_k sont stables par u et v pour tout $k \in [\![1, s]\!]$ alors :*

$$(\forall i, j \in [\![1, s]\!]) \quad \widetilde{u}_i\widetilde{v}_j = \delta_{ij}u\widetilde{v}_i = \delta_{ij}u\widetilde{v}_j$$

En particulier si $i \neq j$ alors $\widetilde{u}_i\widetilde{v}_j = \widetilde{v}_j\widetilde{u}_i = 0$

Preuve: en effet si $x \in E$ alors $\pi_j(x) \in E_j$ et par stabilité de E_j par v on a $v(\pi_j(x)) \in E_j$, donc $\pi_i(v(\pi_j(x))) = 0$ si $i \neq j$ et $v(\pi_j(x)) = v(\pi_i(x))$ si $i = j$, par suite :

$$u\pi_i v\pi_j(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \\ uv\pi_i(x) \quad \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

Par ailleurs, on a :

$$\delta_{ij}uv\pi_i(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \\ uv\pi_i(x) \quad \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

Ce qui termine la preuve du lemme.

Lemme 2 *Si les E_k sont stables par u et v alors on a*

$$uv = vu \Leftrightarrow (\forall k \in [\![1, s]\!]) \quad u_kv_k = v_ku_k$$

Preuve: si $uv = vu$ alors pour tout $k \in [\![1, s]\!]$ et tout $x \in E_k$ on a : $u_k v_k(x) = u(v(x)) = v(u(x))$ (par hypothèse). Or $u(x) = u_k(x)$ car $x \in E_k$ et comme $u_k(x) \in E_k$ on a aussi $v(u_k(x)) = v_k(u_k(x))$. Conclusion ; $u_k v_k = v_k u_k$.
Réciproquement si pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, on a $u_k v_k = v_k u_k$ alors comme :

$$u = \sum_{k=1}^{s} u\pi_k \quad \text{et} \quad v = \sum_{k=1}^{s} v\pi_k$$

on a :

$$uv = \left(\sum_{i=1}^{s} u\pi_i \right) \left(\sum_{i=1}^{s} v\pi_j \right) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} u\pi_i v\pi_j$$

Par le lemme 1 , si $i \neq j$ alors $\widetilde{u_i}\widetilde{v_j} = 0$, par conséquent :

$$(1) \quad uv = \sum_{i=1}^{s} \widetilde{u_i}\widetilde{v_i} \quad \text{et} \quad vu = \sum_{i=1}^{s} \widetilde{v_i}\widetilde{u_i}$$

Par le lemme 1, on a aussi :

$$\widetilde{u_i}\widetilde{v_i} = u\widetilde{v_i} \quad \text{et} \quad \widetilde{v_i}\widetilde{u_i} = v\widetilde{u_i}$$

Ainsi pour démontrer que $uv = vu$ il suffit de prouver que :

$$(\forall i \in [\![1, s]\!]) \quad u\widetilde{v_i} = v\widetilde{u_i}$$

et pour ce faire , il suffit de prouver que les deux endomorphismes coincident sur chaque E_k, pour tout $k \in [\![1, s]\!]$.
Soit $k \in [\![1, s]\!]$ et $x \in E_k$ alors :
• Si $k = i$ on a $\widetilde{u_i}(x) = \widetilde{u_k}(x) = u_k(x)$ et par suite : $v\widetilde{u_i}(x) = v(u_k(x)) = v_k(u_k(x))$ car $u_k(x) \in E_k$ par stabilité.
Par ailleurs : $u\widetilde{v_i}(x) = u_k(v_k(x))$ et comme $u_k v_k = v_k u_k$ par hypothèse on a :

$$(\delta_{ij} u\widetilde{v_i})(x) = (\delta_{ji} v\widetilde{u_i})(x).$$

• Si $k \neq i$ alors $\widetilde{u_i}(x) = \widetilde{v_i}(x) = 0$, ce qui donne :

$$(\delta_{ij} u\widetilde{v_i})(x) = (\delta_{ji} v\widetilde{u_i})(x).$$

On a donc démontré que $\widetilde{u_k}\widetilde{v_k}$ et $\widetilde{v_k}\widetilde{u_k}$ coincident sur chaque E_k, donc ils sont égaux et en conclusion : $uv = vu$.

2 Décomposition de Dunford

Théorème 1 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) *Le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé.*
(ii) *Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que :*

$$\begin{cases} u = d + n \\ dn = nd \\ n \text{ est nilpotent} \\ d \text{ est diagonalisable.} \end{cases}$$

Preuve: Supposons l'existence de d et n avec les conditions ci-dessus. Comme d est diagonalisable on a : $E = \overset{s}{\underset{k=1}{\oplus}} E_{\lambda_k}(d)$ où $\lambda_k, k = 1..s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de d. Comme $nd = dn$ les $E_{\lambda_k}(d)$ sont stables par n. Nommons n_k, d_k les endomorphisme respectifs de $E_{\lambda_k}(d)$ induits par n et d. Il en découle que les $E_{\lambda_k}(d)$ sont stables par u et que l'endomorphisme u_k induit par u est $u_k = d_k + n_k$. Comme n est nilpotent, il en est de même de n_k par suite il existe une base B_k de trigonalisation de n_k. Or dans B_k la matrice de d_k est $\lambda_k I_{\nu_k}$ avec $\nu_k = \dim(E_{\lambda_k}(d))$ appelons T_k la matrice de n_k dans B_k alors $M_k = T_k + \lambda_k I_{\nu_k}$ est la matrice de $u_k = n_k + d_k$ relativement à B_k de sorte que le polynôme caractéristique de u_k est

$$\chi_{u_k} = (\lambda_k - X)^{\nu_k}$$

Il en résulte que :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{s} (\lambda_k - X)^{\nu_k}$$

et que χ_u est scindé.
réciproquement, supposons que

$$\chi_u = (-1)^{\nu} \prod_{k=1}^{s} (X - \lambda_k)^{\nu_k}$$

- **Existence :**

où les λ_k sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u. Par le théorème de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on a :

$$E = \overset{s}{\underset{k=1}{\oplus}} F_k$$

où $F_k = \ker(u - \lambda_k I_\nu)^{\nu_k}$ pour tout $k \in [\![1, s]\!]$. Notons que les F_k sont stables par u car ce sont des noyaux de polynômes en u.
Pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, notons u_k l'endomorphisme de F_k induit par u et Id_k l'endomorphisme identique de F_k et posons : $n_k = u_k - \lambda_k \mathrm{Id}_k$ et $d_k = \lambda_k \mathrm{Id}_k$
comme $F_k = \ker((n_k)^{\nu_k})$ on a n_k est nilpotent. On a $u_k = d_k + n_k$ avec d_k diagonalisable et n_k nilpotent.
En adoptant les notations du I) Posons $d = \sum_{k=1}^{s} \widetilde{d}_k$ et $n = \sum_{k=1}^{s} \widetilde{n}_k$ Alors $u = d + n$ et d est diagonalisable car pour tout $k \in [\![1, s]\!]$ et tout $x \in F_k$ on a

$$d(x) = \widetilde{d}_k(x) = d_k(x) = \lambda_k x$$

Ce qui montre que E est somme directe des F_k eux mêmes sous-espaces propres de d.
n est nilpotent car si $x \in E_k$ alors : $n^{\nu}(x) = (n_k)^{\nu}(x) = 0$ car $(n_k)^{\nu_k} = 0$ et $\nu_k \leq \nu$.
Finalement $dn = nd$ car pour tout $k \in [\![1, s]\!]$ on a $n_k d_k = d_k n_k$ et le lemme 2 ci-dessus.
Cela démontre l'existence de d et ν vérifiant les conditions requises ci-dessus.

- **Unicité :**

Soit (n', d') un couple solution du problème. On va démontrer que $(n', d') = (n, d)$ où (n, d) est le couple construit ci-dessus.

Remarquons que d' et u commutent car comme $u = d' + n'$ on a :

$$\begin{cases} ud' = d'^2 + n'd' \\ d'u = d'^2 + d'n' \end{cases}$$

comme $d'n' = n'd'$ on a $ud' = d'u$. Il en résulte que les F_k sont stables par d' et par suite on peut introduire les d'_k les endomorphismes induits. Comme d_k est une homothétie toute base de diagonalisation de d'_k est une base de diagonalisation de d_k. Soit B_k une telle base. Alors la base adaptée de E associée aux B_k est une base de diagonalisation de d et d' de sorte que $d - d'$ est diagonalisable. Or $d - d' = n' - n$ et :

$$\begin{cases} nn' = (u - d)(u - d') = u^2 - ud' - du + dd' \\ n'n = (u - d')(u - d) = u^2 - ud - d'u + d'd \end{cases}$$

montre que $nn' = n'n$ puisque :
- D'une part : $dd' = d'd$ par le lemme 2 et le faite que d_k et d'_k commutent pour tout $k \in [\![1, s]\!]$.
- D'autre part $ud = (n + d)d = nd + d^2 = dn + d^2 = d(n + d) = du$, de même $ud' = d'u$.
Alors $n - n'$ est nilpotent diagonalisable donc nul donc $n = n'$ et $d = d'$.

Definition 1 *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé, la décomposition $u = d + n$ avec d diagonalisable et n nilpotent et $nd = dn$ s'appelle la decomposition de Dunford de u.*

Remarques:
1) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tout endomorphisme u admet une décomposition de Dunford.
2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Seuls les endomorphismes trigonalisables admettent une décomposition de Dunford
3) Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif quelconque le raisonnement ci-dessus reste valable, donc le théorème ci-dessus est valable pour tout corps commutatif $\mathbb{K}$.