AUTOUR DES NOMBRES PUISSANTS

par Omar Sonebi

Professeur agrégé en Spé TSI,Lycée Al Kawarizmi Safi,Maroc.

Résumé : *dans cette note on définit les nombres puissants et on donne une estimaton de leur densité ainsi que certaines de leurs propriétés arithmétiques .*

Mots-cléfs *: nombre puissant,nombre premier, nombre sans diviseur carré ,Fibonacci,fonction arithmétique de Mobuis,équation de Pell-Fermat, densité.*

1)Généralités *:*

Parmi les entiers naturels remarquables par leurs diviseurs premiers figure les nombres puissants.Leurs propriétés arithmétiques n'ont été étudieés qu'assez récément spécialement par Paul Erdos et Solomon W.Golomb vers les années 1970.

Définition 1) *: soit n un entier naturel non nul,on dit que n est un nombre puissant si pour tout nombre premier p divisant n on a p^2 divise n.*
Remarque *:*
1)Il est clair qu'un nombre est puissant si et seulement si il est produit de puissantes parfaites .
2)les entiers sans diviseur carré ne sont pas des nombres puissants.
Dans la suite Δ respectivement S désigne l'ensemble des nombres puissants respectivement l'ensemble des entiers sans diviseur carré.
On peut donner une autre caractérisation plus fine des nombres puissants qui sera utile dans la suite, la façon suivante :

Proposition 1) *:*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, n est puissant si et seulement il est de la forme a^2b^3 où $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ avec b sans diviseur carré. En plus l'ecriture est unique .
Preuve :
a^2b^3 est trivialement un nombre puissant, réciproquement soit n un nombre puissant avec $n = p_1^{m_1}...p_r^{m_r}$ sa décomposition en facteurs premiers et $m_i \geq 2$ pour $i = 1...r$.
Posons $\alpha_i = 3$ si m_i est impair et 0 sinon, puis $\beta_i = m_i - \alpha_i$ alors β_i est un entier positif pair et on a : $n = a^2b^3$ avec $b = p_1^{\alpha_1/3}...p_r^{\alpha_r/3}$ est sans diviseur carré et $b = p_1^{\beta_1/2}...p_r^{\beta_r/2}$.
L'unicité de l'écriture provient evidemment de l'unicité de la décomposition en facteur premiers de n.

Exercice 1) *:a)Pour tout entier naturel $n \geq 4$ montrer que n !,$n! + 2$ et $n! - 2$ ne sont pas puissants.*
b)Détérminer l'ensemble des nombres premiers p tels que $4^p - 1$ soit puissant.

Proposition 2)*(Solomon W.Golomb) :*
Si P designe l'ensemble des nombres premiers ,la série des inverses de Δ est convergente en plus on a :
$$\sum_{k\in\Delta} \frac{1}{k} = \prod_{q\in P}(1 + \frac{1}{q(q-1)}) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}.$$
Preuve
On a pour tout entier $n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k\in\Delta, k\leq n} \frac{1}{k} \leq \sum_{a^2b^3\leq n} \frac{1}{a^2b^3} \leq \sum_{a\leq n} \frac{1}{a^2}.\sum_{b\leq n} \frac{1}{b^3} < \zeta(2)\zeta(3).$
Donc d'après la proposition 1) la série des inverses de Δ est convergente vers un réel l.

On a d'une part $l.\zeta(6) = \zeta(2)\zeta(3)$.
En effet tout entier $n = a^2b^3c^6$ avec b sans diviseur carré s'écrit trivialement aussi sous forme $n = x^2y^3$ et réciproquement si $n = x^2y^3$ on peut écrire la décomposition en facteurs premiers de y de la façon suivante : $y = q_1...q_r.p_1^{2m_1}...p_s^{2m_s}.l_1^{2n_1+1}...l_t^{2n_t+1}$ et on prend alors $a = x$,$b = q_1...q_r.l_1...l_t$ et $c = \sqrt{\frac{y}{b}}$.
Par suite on a : $\zeta(2)\zeta(3) = \sum\limits_{x\geq 1}\frac{1}{x^2}.\sum\limits_{y\geq 1}\frac{1}{y^3} = \sum\limits_{n\in\Delta}\frac{1}{n}.\sum\limits_{c\geq 1}\frac{1}{c^6} = l.\zeta(6)$.

D'autre part s'agissant de familles convergentes on a : $\prod\limits_{q\in P}(1+\frac{1}{q(q-1)}) = \prod\limits_{q\in P}\sum\limits_{m\geq 2}\frac{1}{q^m} = \sum\limits_{n\in\Delta}\frac{1}{n} = l$

***Conséquences** :*

1)Il n'existe aucune suite arithmétique non constante constituées de nombres puissants.
Preuve :
Supposons qu'ils existent deux entiers non nuls a et r tels que $nr + a \in \Delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or on a : $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{nr+a} \leq \sum\limits_{n\in E}\frac{1}{n} < \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}$, donc la série de terme général $\frac{1}{nr+a} \sim \frac{1}{nr}$ est convergente ce qui est absurde.

***Proposition 3)** :*
Il existe une infinité de couples $(n, n+1)$ formés de nombres puissants consécutifs.
Preuve :
Soit D un entier naturel sans diviseur carré,on sait que l'équation de Pell-Fermat $x^2 - D^3y^2 = 1$ admet une infinité de solutions et parsuite on a une infinité de couples $(x^2, x^2+1 = D^3y^2)$ constitués de nombres puissants consécutifs.
***Remarque** :*
On construit dans la RMS 120-2 deux suites d'entiers naturels générant une infinité de paires de nombres puissants consécutifs ainsi q'une infinité de paires de nombres puissants impairs consécutifs.

2) Densité des nombres puissants dans l'intevalle $[1, n]$.

Rappelons tout d'abords une fonction arithmétique classique dont on aura besoin dans la suite :
***Définition 2)** :Soit n un entier naturel non nul,la fonction arithmétique de Mobuis μ est définie par :*
$\mu(n) = 1$ si $n = 1$
$\mu(n) = (-1)^r$ si $n = p_1...p_r$ est sans diviseur carrés et $\mu(n) = 0$ sinon.
La proposition suivante donne une estimation de la densité des nombres puissants dans l'intervalle $[1, n]$.

***Proposition 4)** :*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ si $P(n)$ désigne le cardinal des nombres puissants inférieur à n,$P(n)$ est proportionel à $\sqrt{n}$ et plus précisement on a : $P(n) = c\sqrt{n} + O(\sqrt[3]{n})$ où $c = \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} \approx 2,173$.
Preuve :
On a succéssivement : $P(n) = \sum\limits_{a^2b^3\leq n}\mu(b)^2 = \sum\limits_{b^3\leq n}\mu(b)^2.(\sum\limits_{a^2\leq n/b^3}1) = \sum\limits_{b\leq n^{\frac{1}{3}}}\mu(b)^2[\sqrt{n}/b^{\frac{3}{2}}]$.

$$= \sum_{b\leq n^{\frac{1}{3}}}\mu(b)^2(\frac{\sqrt{n}}{b^{\frac{3}{2}}} + O(1)) = \sqrt{n}\sum_{b\leq n^{\frac{1}{3}}}\frac{\mu(b)^2}{b^{\frac{3}{2}}} + O(\sqrt[3]{n}).$$

$$= \sqrt{n}(\sum_{b=1}^{\infty}\frac{\mu(b)^2}{b^{\frac{3}{2}}} - \sum_{b>n^{\frac{1}{3}}}\frac{\mu(b)^2}{b^{\frac{3}{2}}}) + O(\sqrt[3]{n}).$$

Or tout entier naturel n s'écrit de façon unique : $n = a^2.b$ où $a \in \mathbb{N}$ et $b \in S$.

D'où on a : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \sum\limits_{b\in S}\frac{1}{b^{\frac{3}{2}}}.\sum\limits_{a=1}\frac{1}{a^3} = \sum\limits_{b=1}^{\infty}\frac{\mu(b)^2}{b^{\frac{3}{2}}}.\zeta(3)$.

Par suite $\displaystyle\sum_{b=1}^{\infty}\frac{\mu(b)^2}{b^{\frac{3}{2}}}=\frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)}=c.$

D'où $P(n)=\sqrt{n}(c-R(n))+O(\sqrt[3]{n})$.
avec $\displaystyle R(n)=\sum_{b>n^{\frac{1}{3}}}\frac{\mu(b)^2}{b^{\frac{3}{2}}}=O(\int_{x^{\frac{1}{3}}}^{+\infty}t^{-\frac{3}{2}}dt)=O(n^{-\frac{1}{6}})$

On obtient enfin : $P(n)=c\sqrt{n}+O(\sqrt{n}.n^{-\frac{1}{6}})+O(\sqrt[3]{n})=c\sqrt{n}+O(\sqrt[3]{n})$ *cfqd.*
La proposition résulte immédiatement du résultat suivant, plus précis dû à Solomon W.Golomb :
$c\sqrt{n}-3\sqrt[3]{n}\leq P(n)\leq c\sqrt{n}$

Conséquence 2) *:*
Les nombres puissants sont assez rares dans le sens suivant : pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ *il existe une suite de k nombres consécutifs non puissants.*
Preuve :
Soit k *un entier naturel non nul,supposons que pour tout entier naturel n on a :*
$[nk,(n+1)k]\cap E\neq\phi$ *donc* $card(E\cap[0,nk]\geq n$.
Or $card(E\cap[0,nk])\leq c\sqrt{kn}$ *d'où* $n\leq c\sqrt{kn}$ *et* $n\leq kc^2$ *ce qui est impossible pour n assez grand.*
Par suite il existe un entier naturel n tel que $[nk,(n+1)k]\cap E=\phi$ *ie la suite kn,kn* $+1$*,...,*$(n+1)k$ *est formée de nombres non puissants.cqfd*

Exercice 2) *:Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturel* $n\in\mathbb{N}$ *tels que l'intervale* $]n^2,(n+1)^2[$ *contient au moins deux nombres puissants.*

3) Polynômes à coéfficients entiers et nombres puissants.

Un polynôme à coéfficients entiers P génére que des nombres puissants à partir d'un certain rang que si P est aussi "puissant" dans le sens de la proposition suivante :

Proposition 5) *:*
Soit P un polynôme unitaire à coéfficients entiers tel que $P(n)$ *soit puissant à partir d'un certain rang alors la décomposition de P en facteurs irréductible vérifie :* $P=P_1^{r_1}...P_s^{r_s}$ *avec* $r_i\geq 2$ *pour* $i=1...s$.
Preuve :
Soit P un polynôme à coéfficients entiers tel que $P(n)$ *soit puissant pour* $n>N$*.Supposons par exemple que* $r_1=1$ *or les polynômes* P_1 *et* P_1' *sont premiers entre eux donc ils existent deux polynômes U et V dans* $\mathbb{Z}[X]$ *tels que :* $UP_1+VP_1'=d$ *avec* $d\in\mathbb{Z}$.
Rappellons que l'ensemble des nombres premiers q tels que il existe un entier $m>N$ *vérifiant :* $P_1(m)\neq 0$ *et q divise* $P_1(m)$ *est infini et donc à fortiori q ne divise pas* $P_1'(m)$ *pour m assez grand (*$m>N'$*) car* $P_1'(m)\wedge P_1(m)$ *divise d .*
Par ailleurs on a : $P_1(m+q)\equiv P_1(m)\equiv 0\ mod$ *q et* $P_1(m+q)-P_1(m)\equiv qP_1'(m)$ *mod* q^2.
Et par conséquent l'un des entiers $P_1(m+q)$ *ou* $P_1(m)$ *est nécéssairement non divisible par* q^2.
Or les polynômes P_1 *et* $Q=P/P_1$ *sont premiers entre eux donc ils existent deux polynômes R et S dans* $\mathbb{Z}[X]$ *tels que :* $RP_1+SQ=e$ *avec* $e\in\mathbb{Z}$.
D'où $P_1(n)$ *et* $Q(n)$ *sont premiers entre eux pour n assez grand par suite l'un des entiers* $P(m+q)$ *ou* $P(m)$ *est nécéssairement divisible par q et non divisible par* q^2 *donc non puissant ce qui est absurde donc* $r_1\geq 2$.
La réciproque est clairement vérifiée.

Exercice 3) *:Déterminer les polynôme à coéfficients entiers P qui générent tous les nombres puissants ie :* $\forall n\in\Delta\ \exists a\in\mathbb{Z}$ *tel que* $P(a)=n$.

4)Suites récurrentes linéaires et nombres puissants.

Rappellons tout d'abords la conjecture (abc) :
Soit $r>0$ *il existe* $M(r)>0$ *tel que pour tout triplet d'entiers positifs a,b,c premiers deux à deux tels que*

$c = a + b$ on a : $c < M(r)(\prod_{p/abc} p)^{1+r}$.

Proposition 5) *:Soient a,b,x,y des entiers naturels premiers entre eux deux à deux, alors en admettant la conjecture (abc)l'ensemble des entiers n tels que $ax^n + by^n$ soit puissant est fini.*

Preuve :

Notons d'abords que ax^n,by^n et $ax^n + by^n$ sont premiers entre eux deux à deux pour tout entier n.

On appliquant alors la conjecture (abc) à ax^n,by^n et $ax^n + by^n$ pour $r = \frac{1}{2}$ il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$ax^n + by^n < M(\prod_{p/ax^n.by^n.ax^n+by^n} p)^{1+r} \leq Maxby.(ax^n + by^n)^{\frac{3}{4}}$$

ou encore $(ax^n + by^n)^{\frac{1}{4}} \leq Maxby$ pour tout entier n.

Ce qui est impossible pour n assez grand.

La dernière proposition laisse présager qu'une suite récurrente linéaire,en particulier la suite de Fibonacci contient un nombre fini de nombres puissants.

Par ailleurs on ne sait toujours pas si la suite de Fibonacci contient un nombre fini de nombres premiers mais ce qu'on peut confirmer c'est le résultat suivant :

Proposition 6) *:*

L'ensemble des entiers premiers p tel que F_p soit premier et F_{2p} soit puissant est fini.

Preuve :

Supposons qu'il existe une suite infinie de nombres premiers (p_n) tels que F_{p_n} soit premier et F_{2p_n} soit puissant.

Rappellons d'une part que F_{p_n} divise F_{2p_n} et donc il existe un entier k_n tel que $F_{2p_n} = k_n F_{p_n}^2$.

D'autre part on sait que $F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}x^n$ où $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.Par suite on a : $\frac{F_{2p_n}}{F_{p_n}^2} = k_n \sim \sqrt{5}$ quand n tend vers l'infini ce qui est absurde car la suite d'entiers (k_n) ne peut converger que vers un entier.

Exercice 4) *:Détérminer les entiers a tels que $a^n - 1$ soit puissant à partir d'un certain rang.*

Exercice 5) *:i)Soient a et b deux entiers ,montrer que $\Delta \cap (an + b)_{n\in\mathbb{N}}$ est vide ou infinie.*

ii)Donner une condition necéssaire et suffisante pour que $\Delta \cap (an + b)_{n\in\mathbb{N}}$ soit non vide. rép : $v_p(a) = v_p(b)$ si $p/d = a \wedge b$

5) Questions ouvertes *:*

On commence par la plus célébre des conjectures concernant les nombres puissants :

1)Conjecture d'Erdos-Mollin et Walsh : Il n'existe aucun triplet $(n, n+1, n+2)$ de nombres puissants consécutifs.

On dispose néaumoins d'une réponse partielle en admettant la conjecture (abc) : il existe qu'un nombre fini de triplet formé de nombres puissants consécutifs.

En effet soit $n > 1$ un entier tel que n-1,n et n+1 soient puissants.

Observons que le produit $n(n-1)(n+1)$ est puissant et pour tout nombre puissant m on a : $\prod_{p/m} p \leq \sqrt{m}$.

On appliquant alors la conjecture (abc) à l'égalité $(n^2 - 1) + 1 = n^2$ on obtient (pour $0 < r < \frac{1}{3}$ donc $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}r > 0$) :

$$n^2 < M(r)(\prod_{p/n^2(n-1)(n+1)} p)^{1+r} = M(r)(\prod_{p/n(n-1)(n+1)} p)^{1+r} \leq M(r)\sqrt{n(n^2-1)}^{1+r} < M(r)n^{\frac{3}{2}(1+r)}.$$

de sorte que $n^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}r} < M(r)$ ce qui est impossible pour n assez grand.

-2)Erdos avait conjecturé que les seules puissances parfaites non triviales parmi les nombres de Fibonacci sont 8 et 144 et récémment en 2003 X et Y l'ont montré et en tenant compte de la prosition 5) il est ligitime de se demander si l'ensemble des nombres de Fibonacci puissants est aussi fini ?

-3)On sait d'après le théorème des quatres carrés que tout entier naturel est somme de plus quatre nombres puissants.

Erdos a fait mieux en conjecturant qu'à partir d'un certain rang,tout entier naturel est somme de plus trois

nombres puissants.
Voici en guise de conclusion une question ouverte ! :
Exercice 6) *:Peut-on confirmer que pour tout entier naturel* $n \geq 4$, $2^n - 1$ *n'est pas un nombre puissant ?*

Référence :

-Wikipédia.
-Revue de maths spéciales 120-2.
-Nombres premiers : mystères et enjeux par J.M. De Koninck.
-Sur la distrubition des nombres spéciaux consécutifs par Steve Pettigrew.