Autour de la fonction Γ d'Euler

Mohamed Ait Lhoussain

25 février 2013

On rappelle que pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Sens de variation de Γ

L'expression, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, de :

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

obtenue grâce au théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale avec paramètre, permet de dire que Γ'' est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et par suite que Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. remarquons que $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1.\Gamma(1) = 1$ donc $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Le théorème de Rolle appliqué à Γ assure de l'existence de $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.
Comme Γ' est strictement croissante on a c est son unique zéro sur $]0, +\infty[$, de plus on a le signe de Γ' , à savoir :
$\Gamma' > 0$ sur $]c, +\infty[$ donc Γ strictement croissante sur cet intervalle
$\Gamma' < 0$ sur $]0, c[$ donc Γ strictement décroissante sur cet intervalle.
$\Gamma(c)$ est un minimum absolu de Γ.

Calcul de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

on a par définition :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

Par le changement de variable : $\sqrt{t} = u$ il vient $t = u^2$ donc

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2udu = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$$

L'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, connue sous le nom : Intégrale de Gauss, vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Il en résulte que :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Comportement de Γ au voisinage de $+\infty$:

Comme $c < 2$ on a Γ est strictement croissante sur $]2, +\infty[$. Donc pour tout $x > 3$ on a : $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \geq \Gamma(2)(x-1)$. Comme $\Gamma(2) > 0$ il en résulte que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$

Pour tout $x > 2$ on a : $\dfrac{\Gamma(x)}{x} = \dfrac{x-1}{x}\Gamma(x-1) \sim \Gamma(x-1)$.

il en résulte que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$ et que le graphe de Γ admet une branche parabolique de direction l'axe des y au voisinage de $+\infty$.

Comportement de Γ au voisinage de 0 :

De $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ et la continuité de Γ, on déduit qu'au voisinage de 0 à droite on a : $\Gamma(x) \sim \dfrac{\Gamma(1)}{x} = \dfrac{1}{x}$ en particulier on a le comportement asymptotique de Γ au voisinage de 0 à droite : elle se comporte comme $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, en particulier : $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$

Prolongement analytique de Γ

On peut étendre Γ au demi plan $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C}/\mathcal{R}e(z) > 0\}$ par la même expression :

$$\forall z \in \Pi_+ \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

ce qui définit une application de l'ouvert Π_+ de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}^*$.
on verra dans une leçon à venir que ce prolongement de Γ, noté aussi Γ est holomorphe (don analytique) sur l'ouvert Π_+.

D'autres expressions de Γ

Il existe d' autres prolongements plus avancés de la fonction Γ. En voici deux dus respectivement à Euler et Weierstrass valable pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}$$

où $\gamma = \lim_{n \to +\infty} (H_n - \ln(n))$ avec $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. c'est la constante d'Euler Mascheroni.

$$\gamma \simeq 0,5772156649$$

La dernière formule due à Weierstrass nécessite la connaissance de la notion de produits infinis qui fera l'objet d'un autre article à part.