L'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \Phi_{A,B}(X) = AXB$ est diagonalisable si A et B sont diagonalisables.

Mohamed Ait Lhoussain

2 décembre 2013

1 Une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes et pour $j \in [\![1,p]\!]$, notons C_j la j ème colonne de A de sorte que si $\mathcal{E}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ alors $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(C_j)_{1\leq j\leq p}$. Ainsi on a $A = O$ si et seulement si $\forall j \in [\![1,p]\!] \quad C_j = O$.

Proposition 1 *Soient $\mathcal{E} = (E_1, \cdots, E_n)$ et $\mathcal{F} = (F_1, \cdots, F_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ alors si on pose $\Gamma_{ij} = E_i{}^tF_j$ pour tout $i,j \in [\![1,n]\!]$, alors la famille $(\Gamma_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

En effet soit $\alpha = (\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de scalaire tel que :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} \alpha_{ij}\Gamma_{ij} = 0$$

cela veut dire :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}E_i{}^tF_j = 0$$

Donc , en posant pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $B_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}E_i$, et par permutation des symboles de sommation :

$$\sum_{j=1}^{n} B_j{}^tF_j = 0$$

Ce qui donne par transposition :

$$\sum_{j=1}^{n} F_j{}^tB_j = 0$$

Or si, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on note $B_j = (b_{kj})_{1\leq k\leq n}$ alors, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$F_j{}^tB_j = (b_{kj}F_j)_{1\leq k\leq n}$$

Donc on obtient :

$$\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj} F_j\right)_{1\leq k\leq n} = 0$$

donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} b_{kj} F_j = 0$$

et par liberté de la famille $\mathcal{F}$ on a pour tout $j, k \in [\![1, n]\!]$: $b_{kj} = 0$ ce qui fournit $B_j = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Or nous avons :

$$B_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} E_i$$

et la famille $\mathcal{E}$ est libre, donc $\alpha_{ij} = 0$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Exemple

Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont les bases canoniques respectives de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ alors (Γ_{ij}) est précisément la base canonique (E_{ij}) de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Autrement dit :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!] \quad E_{ij} = E_i \times {}^t E_j$$

2 L'endomorphisme $\Phi_{A,B}$

Soient A et B deux matrices carrées réelles de taille n et on leur associe l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \Phi_{A,B}(X) = AXB$$

2.1 Réduction

Théorème 1 *Si A et B sont diagonalisables alors $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.*

En effet si A et B sont diagonalisable alors ${}^t B$ est aussi diagonalisable. Soit $\mathcal{E} = (E_1, \cdots, E_n)$ une base de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres : $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ et $\mathcal{F} = (F_1, \cdots, F_n)$ une base de vecteurs propres de ${}^t B$ associés aux valeurs propres $\mu_1, \cdots, \mu_n$.
On va montrer que $\mathcal{C} = (\Gamma_{ij})$ tel que $\Gamma_{ij} = E_i {}^t F_j$ est une base de vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$. La proposition ci-dessus montrer que $\mathcal{C}$ est une base. Or :

$$\begin{aligned}
\Phi_{A,B}(\Gamma_{ij}) &= AE_i {}^t F_j B \\
&= (AE_i)({}^t F_j B) \\
&= (AE_i)^t({}^t B F_j) \\
&= (\lambda_i E_i)^t(\mu_j F_j) \\
&= \lambda_i \mu_j E_i {}^t F_j \\
&= \lambda_i \mu_j \Gamma_{ij}
\end{aligned}$$

Donc Γ_{ij} est un vecteur propre associé à la valeur propre $s_{ij} = \lambda_i \mu_j$

2.2 Determinant et trace

Proposition 2 *On a* $\det(\Phi_{A,B}) = (\det(A)\det(B))^n$ *et* $\mathrm{tr(\Phi_{A,B}) = tr(A)tr(B)}$

En effet $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable de valeurs propres $s_{ij}\lambda_i\mu_j$ donne :

$$\det(\Phi_{A,B} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j = (\prod_{i=1}^{n}\lambda_i)^n(\prod_{j=1}^{n}\mu_j)^n = (\det(A)\det(B))^n$$

De même :

$$\mathrm{tr}(\Phi_{A,B}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j = (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)(\sum_{j=1}^{n}\mu_j) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$$