Formes quadratique : Existence des bases orthogonales et orthonormales.

Mohamed Ait Lhoussain

27 novembre 2013

$\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 1 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire φ. Alors l'espace quadratique (E, q) admet des bases orthogonales.*
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors (E, q) admet des BON si et seulement si φ est une produit scalaire.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors (E, q) admet des BON si et seulement si q est non dégénérée.

Preuve :
Le premier point se fait par récurrence sur $n = \dim E$.
Si $n = 1$, toute base de (E, q) est orthogonale.
Pour l'hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que tout espace quadratique de dimension n admet une base orthogonale. Soit E de dimension $n + 1$, deux cas sont possibles : si q est nulle alors toutes base de E convient, sinon soit $(e_1, \cdots, e_{n+1})$ une base de E tel que $q(e_1) \neq 0$ on pose $u_k = e_k + \lambda_k e_1$ si $k > 1$ et $u_1 = e_1$ et on cherche λ_k tel que u_1 soit orthogonal à u_k. Il vient : $\lambda_k = -\dfrac{\varphi(e_1, u_k)}{q(e_1)}$. Il est facile de voir que $(u_1, \cdots, u_{n+1})$ est libre en utilisant la matrice de passage par exemple. Par hypothèse de récurrence il existe une base $(v_2, \cdots, v_{n+1})$ orthonormale de $F = \mathrm{Vect}(u_2, \cdots, u_{n+1})$ muni de la forme quadratique induite par q. Il est facial de voir que $(v_1, v_2, \cdots, v_{n+1})$ où $v_1 = u_1$ est une BON de E.
• Supposons que (E, q) admet une BON Ω, alors la matrice de q relativement à Ω est égale à I_n, donc q est de rang n donc elle est non dégénérée. Ainsi non dégénérée est une condition nécessaire pour l'existence d'une BON.
• Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cette condition est suffisante car si B est une base orthogonale de (E, q) la matrice M de q relativement à B est une matrice diagonale et comme q est non dégénérée, M est de rang n donc ses termes diagonaux λ_k son non nuls. si $q(e) = \lambda$ alors $q(ae) = 1$ signifie : $a^2 = \dfrac{1}{\lambda}$, il suffit donc de prendre a une racine de $\dfrac{1}{\lambda}$ chose possible dans le corps des complexes. Cela termine la preuve de ce cas.
• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors si B est une BON de (E, q) alors φ est définie positive puisque si $x \in E$ de coordonnée $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ relativement à B alors $q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, donc il s'agit d'un produit scalaire. réciproquement on sait que dans un espace euclidien il y'a toujours des BON (Gram-Schmidt).