Continuité d'une application réelle à deux variables réelles : Etude d'un exemple

Ait Lhoussain Mohamed

23 février 2013

1 Introduction

La continuité des applications à deux variable soulève des difficultés surtout quand il s'agit d'une applications définie par diverses expressions suivant la partie à laquelle appartient la variable.
Ce document résume et enrichie la discussion menée sur le sujet de l'application h du problème d'analyse traité le premier jour de l'activité de concentration. il s'agit de l'application h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad h(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xt)}{xt} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ t \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Cette discussion soulevées par les professeur ayant encadré la concentration et à laquelle les élèves ont contribué de manière positive s'est résumé par le fait qu'on peut trouver diverses méthodes pour traiter cette question et ces méthodes ont été exposées par les professeurs au tableau, l'exposé étant animé par les interventions des élèves.
le but de ce document est de conserver une trace de l'activité mais aussi poursuivre le sujet en engageant d'autres discussions à propos du sujet de la continuité des applications à plusieurs variables.

2 Première méthode

On écrit pour $xt \neq 0$:

$$h(x,t) = \frac{\sin(xt)}{xt} \times \frac{x}{e^x - 1} \times t$$

ce qui suggère de remarquer que si on définit les applications A, B, u, v, w suivantes comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad A(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 1 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad B(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 1 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad u(x,t) = xt \; ; \; v(x,t) = x \; ; \; w(x,t) = t$$

alors on a :

$$(\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2) \quad h(x,t) = A(u(x,t))B(w(x,t))v(x,t)$$

ce qui veut dire exactement que :

$$h = A \circ u \times B \circ w \times v$$

En effet on a déjà vu que c'est vrai si $xt \neq 0$.
Si $t = 0$ on a $v(x,t) = 0$, donc le membre de droite vaut 0, or on a aussi : $h(x,0) = 0$
Si $t \neq 0$ et $x = 0$ alors $v(x,t) = v(0,t) = t$; $w(x,t) = u(x,t) = 0$ si bien que $A(u(x,t)) = B(w(x,t)) = 1$ et par suite le membre de droite vaut t , or $h(x,t) = h(0,t) = t$.
Comme toutes les applications A, B, C, u, v et w sont continues sur leur ensembles de départs respectifs , il en découle que h est continue sur $\mathbb{R}^2$

3 Deuxiéme méthode

3.1 Rappels

On commence par donner certains rappels concernant les limites et la continuité et on se limitera à des résultat directement en relation avec le sujet qu'on traite.

Définition : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et A une partie de X tel que a est adhérent à A. On dit que $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = \ell$ si :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \|x - a\| < \eta \end{array} \right. \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On a alors les propositions suivantes faciles à démontrer :

Proposition1 : Soit f une application $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, A une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et $a \in A$. Alors f est continue au point a si et seulement si la restriction de f à Ω est continue au point a.

Proposition2 : Si A_1 et A_2 sont deux parties de $\mathbb{R}^2$ tel que a est adhérent à A_1 et à A_2 et si f possède la même limite ℓ en a suivant A_1 et A_2 et si en plus $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}^2$ alors : $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f(x) = \ell$

3.2 La deuxiéme méthode

On se propose de prouver que h est continue sur $\mathbb{R}^2$. Pour cela , soit $a = (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$.
Dans ce qui suit, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \\ F = \{0\} \times \mathbb{R} \end{array} \right.$$

On remarque que ω est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et que F son complémentaire est fermé (c'est l'axe des t).
1ER CAS : $a \in \Omega$ D'aprés la **Proposition 1**, h est continue au point a si et seulement si sa restriction $\hat{h}$ à Ω est continue au point a. Or par définition, on a : $\forall (x,t) \in \Omega \quad \hat{h}(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{e^x - 1}$. Il en résulte que $\hat{h}$ est continue sur Ω puisqu'elle est obtenue par les operations algébrique et la composition à partir des applications continues suivantes :

$(x,t) \mapsto xt$ de Ω vers $\mathbb{R}$,

$(x,t) \mapsto x$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$;

$x \mapsto \sin x$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$x \mapsto e^x - 1$ de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$.

Notons que cette dernière ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^*$, ce qui justifie l'existence et la continuité de l'inverse $x \mapsto \dfrac{1}{e^x - 1}$
Conclusion 1 : si $a \in \Omega$, alors h est continue au point a
2EM CAS : $a \in F$; Ceci veut dire que $a = (0, t_0)$ donc $h(a) = t_0$. La continuité de h au point a signifie que :

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(0,t_0)\\(x,a)\neq(0,t_0)}} h(x,t) = h(a) = t_0$$

on va utiliser la **Proposition 2** pour $A_1 = \Omega$ et $A_2 = F$. Les conditions de la proposition sont bien vérifiées, à savoir :

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}^2 \\ (0,t_0) \in \overline{A_1} \quad \text{et} \quad (0,t_0) \in \overline{A_2} \end{cases}$$

• Commençon par démontrer que :

$$(1) \qquad \lim_{\substack{(x,t)\to(0,t_0)\\(x,t)\in F}} h(x,t) = t_0$$

$(x,t) \in F$ veut dire $x = 0$ et on a $h(x, t = t$, donc (1) revient à :

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\t\neq t_0}} t = t_0$$

ce qui est juste.
• Faisons le même travail pour :

$$(2) \qquad \lim_{\substack{(x,t)\to(0,t_0)\\(x,t)\in\Omega}} h(x,t) = t_0$$

On va distinguer deux cas :
• • 1ER cas : $t_0 = 0$ alors comme pour tout $(x, t \in \Omega$, on a : $h(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{e^x - 1}$ et tenant compte de $|\sin(xt)| \leq |xt|$ on a : $|h(x,t)| \leq \dfrac{|x|}{|e^x - 1|}|t| \sim |t|$ quand (x,t) est voisin de $(0,0)$ et comme :

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(0,0)\\(x,t)\neq(0,0)}} |t| = 0$$

on a du coup :

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(0,0)\\(x,t)\neq(0,0)}} h(x,t)=0$$

$\bullet\bullet$ 2EM cas : $t_0\neq 0$. Soit $V=]-1,1[\times]t_0-\alpha,t_0+\alpha[$ avec $\alpha=\dfrac{|t_0|}{2}$. Il est clair que pour tout $(x,y)\in V\cap\Omega$, on a $xt\neq 0$. On peut donc écrire :

$$\forall(x,y)\in V\quad \Delta(x,y)=|h(x,y)-h(0,t_0)|=\left|\frac{\sin(xt)}{xt}.\frac{x}{e^x-1}.t-t_0\right|$$

Il en résulte que :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,t_0)\\(x,y)\neq(0,t_0)}} \Delta(x,y)=0$$

Puisque :

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(0,t_0)\\(x,t)\neq(0,t_0)}} \frac{\sin(xt)}{xt}=\lim_{\substack{(x,t)\to(0,t_0)\\(x,t)\neq(0,t_0)}} \frac{x}{e^x-1}=1$$

justifié par :

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(0,t_0)\\(x,t)\neq(0,t_0)}} xt=0$$

et

$$\lim_{\substack{u\to 0\\u\neq 0}} \frac{\sin u}{u}=1$$

Conclusion 2 : si $a\in F$, alors h est continue au point a
Conclusion générale : h est continue sur $\mathbb{R}^2$

4 Une question en relation avec le sujet

4.1 La question

Voici une question interessante en relation avec ce genre de fonctions h dont la continuité est étudiée ci-dessus :
Question : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application de classe C^1. on lui associe l'application $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si}\quad x\neq y\\[2ex] f'(x)\quad\text{si}\quad x=y\end{cases}$$

Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$

4.2 Indications pour une réponse

4.2.1 Première méthode

poson $\Delta = \{(x,x)/x \in \mathbb{R}\}$ et $U = \mathbb{R}^2 \backslash \Delta$. La continuité de F sur U ne pose aucun problème car U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (à justifier) et on peut utiliser la proposition 1 donnée ci-dessus.
Si $a = (x_0, x_0) \in \Delta$ on remarque que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$, on a :

$$F(x,y) - F(x_0,x_0) = \frac{1}{x-y} \int_x^y (f'(t) - f'(x_0))\, dt$$

et si $x = y$ alors :

$$F(x,y) - F(x_0,x_0) = f'(x) - f'(x_0)$$

Ona tout pour utiliser la proposition 2 en cherchant la limite de $f(x,y)$ quand (x,y) tends vers (x_0,x_0) :

1. suivant U
2. Suivant Δ

En effet comme par hypothése f' est continue au point x_0, soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on aie :

$$|t - x_0| < \eta \Rightarrow |f'(t) - f'(x_0)| < \varepsilon$$

Alors en prenant $\alpha = \dfrac{\eta}{2}$ on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases} [x - x_0| < \alpha \\ |y - y_0| < \alpha \end{cases}$ on a :
Si $x \neq y$ alors :

$$|F(x,y) - F(x_0,x_0)| = \left| \frac{1}{x-y} \int_x^y (f'(t) - f'(x_0))\, dt \right| < \varepsilon$$

A justifier.
Si $x = y$ alors :

$$|F(x,y) - F(x_0,x_0)| = |f'(x) - f'(x_0)| < \varepsilon$$

A justifier aussi, ce qui permet de conclure.

4.2.2 Deuxième méthode :

Remarquer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a la relation suivante :

$$F(x,y) = \int_0^1 f((1-t)f'(x) + tf'(y))\, dt$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. on veut démontrer que :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(x,y) = F(a,b)$$

On utilise la méthode séquetielle :
Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles tel que : $x_n \to a$ et $y_n \to b$ quand n tends vers $+\infty$.
Il faut prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n, y_n) = F(a,b)$$

.
Suggestion : Pesner à utiliser la suite de fonctions :

$$g_n(t) = (1-t)f'(x_n) + tf'(y_n)$$

et le théorème de convergence dominée appliqué à cette suite.