Calcule de l'intégrale de Dirichlet : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$ en utilisant une intégrale avec paramètre.

Mohamed Ait Lhoussain

25 janvier 2013

On considère la fonction réelle de variable réelle F définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{dt}$$

On va montrer que

1. F est bien définie sur $\mathbb{R}$
2. F est continue sur $\mathbb{R}$
3. f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$
4. $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad F(x) = \arctan x$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{dt}$

Ceci nous donnera en particulier la valeur de l'intégrale de Dirichlet, à savoir :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{dt} = \frac{\pi}{2}$$

1) F est bien définie sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. L'application $u_x : t \mapsto e^{-t}\,\dfrac{\sin(xt)}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et elle est prolongeable par continuité au point 0 à droite puisque : $\displaystyle\lim_{t\to0^+} u_x(t) = x$ puisque c'est évident si $x = 0$ et si $x > 0$ on a $\sin(xt) \sim xt$ quand t tends vers 0 à droite.
Pour l'intégrale définissant $F(x)$, le problème se pose donc à la borne $+\infty$ uniquement.
Or pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a $|u_x(t)| \leq |x|e^{-t}$ (car $\forall t \in [1, +\infty[)$ $\left|\dfrac{\sin xt}{xt}\right| \leq 1$).
Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{dt}$ converge on a $F(x)$ bien définie.
Si $x \leq 0$ alors $F(-x)$ est bien définie or $F(x) = -F(-x)$._ Conclusion : F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Continuité de F

Pour toit $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, posons : $f(x,t) = e^{-t}\dfrac{\sin(xt)}{t}$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$. De plus si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ alors pour tout $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$, on a :

$$|f(x,t)| \leq Me^{-t}$$

où

$$M = \max(|a|,|b|)$$

Comme $\phi : t \mapsto Me^{-t}$ est integrable sur $]0,+\infty[$, on a F est continue sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème concernant la continuité des applications définies par une intégrale avec paramètre.

3) F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

L'application $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout entier naturel k on a, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \frac{e^{-t}}{t}t^k \sin\left(xt + k\frac{\pi}{2}\right)$$

En particulier si $k \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = t^{k-1}e^{-t} \sin\left(xt + k\frac{\pi}{2}\right)$$

de sorte que pour tout $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$, on a :

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq M^{k-1}e^{-t}$$

où

$$M = \max(|a|,|b|)$$

Comme la fonction dominante $t \mapsto M^{k-1}e^{-t}$ est integrable sur $]0,+\infty[$ l'application F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad F^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\sin\left(xt + k\frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{dt}$$

4)

Remarquons qu'en particulier on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{dt}$$

C'est donc la partie réelle de :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t+ixt}\,\mathrm{dt} = \left[\frac{1}{-1+ix}e^{-t+ixt}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}$$

ce qui donne :

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et comme $F(0) = 0$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \arctan(x)$$

5)

L'application g définie par $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $g(0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $g = G'$ où

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{dt}$$

On a alors :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-t}\,g(xt)\,\mathrm{dt}$$

En intégrant par partie on a :

$$F(x) = [e^{-t}G(xt)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}G(xt)\,\mathrm{dt}$$

Valide car les limites du crochet valent 0 quand t tends respectivement vers $+\infty$ et 0 et on a ainsi :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}G(xt)\,\mathrm{dt}$$

Soit (x_n) une suite de nombres réels qui tends vers $+\infty$ pour laquelle on associe la suite d'application (f_n) tel que :

$$f_n(t) = e^{-t}G(x_nt)$$

On remarque que :

1. f_n converge simplement vers $t \mapsto e^{-t}I$ où $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{dt}$.
2. les f_n sont dominées par Me^{-t} où $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |S(x)|$ qui existe puisque S est continue en 0 et admet une limite finie en $+\infty$.

Par le théorème de convergence dominée on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{+\infty} Ie^{-t}\,\mathrm{dt} = I$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = I$$

Pour toute suite (x_n) réelle qui tends vers $+\infty$. Ceci donne par la caractérisation séquentielle de la limite :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = I$$

et comme pare le calcul direct à partir de $F(x) = \arctan(x)$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{2}$ on en déduit que $I = \dfrac{\pi}{2}$.