La restriction à $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{C})$ de la transformation de Laplace $\mathcal{L}$ est injective

Mohamed Ait Lhoussain

25 janvier 2013

1 Introduction

$\mathcal{CM}([0, +\infty[, \mathbb{C})$ dénote le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des application continues par morceaux de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{C}$.
Si $f \in \mathcal{CM}([0, +\infty[, \mathbb{C})$ n on note :

$$I(f) = \{x \in \mathbb{R}/t \mapsto f(t)e^{-xt} \text{ est integrable}\}$$

et

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{CM}([0, +\infty[, \mathbb{C})/I(f) \neq \emptyset\}$$

Pour tout $f \in \mathcal{F}$ on montre facilement que $I(f)$ est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$, ce qui veut dire que $I(f)$ est de la forme $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Si $f \in \mathcal{F}$ alors pour tout $x \in I(f)$, on pose :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} \, \mathrm{dt}$$

L'application $\mathcal{L}(f)$ est appelée la transformée de Laplace associée àf.
on montre facilement que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $I(f)$ est de classe C^∞ sur l'intérieur de $I(f)$ et que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad (\mathcal{L}(f))^{(k)} = \mathcal{L}((-1)^k t^k f)$$

On peut considérer $\mathcal{L}$ comme une application de $\mathcal{F}$ vers l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ et il est facile de voir que $\mathcal{L}$ est une application linéaire.
Notre objectif dans ce qui suit est de prouver que la restriction de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{C}) \cap \mathcal{F}$ est injective..
$\mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{C})$ désigne sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}([0, +\infty[, \mathbb{C})$ des applications continues. Autrement dit : on va montrer que si $f \in \mathcal{F}$ et f est continue alors si $\mathcal{L}(f) = 0$ alors $f = 0$.

2 Une propositions

On rappelle le théorème d'approximation polynômiale de Weierstrass selon lequel : Toute application f d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ est une limite uniforme d'applications polynômiales de $[a, b]$ vers $\mathbb{C}$. Abutment dit : Si $f : (a, b] \to \mathbb{C}$ continue alors il existe une suite (P_n) de polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - P_n(t)| = 0$$

Nous allons utiliser ce résultat pour prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 1

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une application continue. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\int_a^b t^n f(t)\, \mathrm{d}t = 0$ alors $f = 0$ sur $[a, b]$

Preuve :
D'après les rappels ci-dessus, f étant continue sur $[a, b]$ on $\overline{f}$ aussi, $\overline{f}$ est une limite uniforme de suite (P_n) d'applications polynômiales de $[a, b] \to \mathbb{C}$. Par continuité de $g \mapsto \displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\, \mathrm{d}t$ de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ vers $\mathbb{K}$, on a

$$\int_a^b P_n(t)f(t)\, \mathrm{d}t \to \int_a^b \overline{f}(t)f(t)\, \mathrm{d}t$$

quand n tends vers $+\infty$. Or par hypothèse :

$$\int_a^b P_n(t)f(t)\, \mathrm{d}t = 0,$$

donc $\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2 = 0$ et par continuité de f on a $f = 0$

3 Injectivité de $\mathcal{L}$

THEOREME 1

Soit $f \in \mathcal{F}$. Si f est continue sur $[0, +\infty[$ alors $\mathcal{L}(f) = 0 \Rightarrow f = 0$

Preuve :
Soit $z \in I(f)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{L}(f)(z + n) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(z+n)t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (f(t)e^{-zt})e^{-nt}\, \mathrm{d}t$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, l'application F définie par $F_z(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)e^{-uz}\,\mathrm{du}$ est une primitive de f sur $[0, +\infty[$. Elle permet d'écrire :

$$\mathcal{L}(f)(z+n) = \int_0^{+\infty} F_z'(u)e^{-nu}\,\mathrm{du}$$

et de faire une intégration par parties :

$$\mathcal{L}(f)(z+n) = [F_z(u)e^{-nau}]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} F_z(u)e^{-nu}\,\mathrm{du}$$

Pourvue de sens car : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_z(u) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)e^{-uz}\,\mathrm{du}$ est convergente puisque $z \in I(f)$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_z(u)e^{-nu}\,\mathrm{du}$ est convergente et l'égalité ci-desssus est validée.Ainsi on obtient :

$$\mathcal{L}(f)(z+n) = n\int_0^{+\infty} F_z(u)e^{-nu}\,\mathrm{du}$$

Par le changement de variable $x = e^{-u}$ il vient :

$$\mathcal{L}(f)(z+n) = n\int_0^{1} F_z(-\ln x)x^{n-1}\,\mathrm{dx}$$

Si on suppose donc que $\mathcal{L}(f) = 0$ on aura pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 x^n g(x) = 0$$

avec $g(x) = F_z(-\ln x)$ pour tout $x \in]0, 1]$ et $g(0) = \mathcal{L}(f)(z) = 0$, ce qui fait de g une application continue de $[0, 1]$ vers $\mathbb{C}$ et la proposition (1) s'applique et donne $g = 0$ et par suite $F_z = 0$ et par suite $F_z' = 0$ et finalement $f = 0$.