$\phi(f) = \min\limits_{t \in [a,b]} f(t)$. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles, elle est bornée et atteint ses bornes, en particulier si $h, g \in E$, il existe $c, d \in [a, b]$ tel que $\phi(g) = f(c)$ et $\phi(h) = f(d)$ donc $\phi(g) - \phi(h) = g(c) - h(d) = g(c) - g(d) + g(d) - h(d) \leq g(d) - h(d) \leq \|g - h\|$.
Par symétrie des rôles, on a aussi $\phi(h) - \phi(g) \leq \|g - h$,d'où : $|\phi(g) - \phi(h)| \leq \|g - h\|$.