Soit $x \in [0,1]$, alors $f^2(x) = f^2(x) - f^2(0) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)f'(t)dt$.

On a alors $f^2(x) \leq 2\displaystyle\int_0^x |f(t)||f'(t)|dt$.

Pour tout $t \in [0,1]$, posons : $h(t) = \displaystyle\int_0^t |f'(u)|du$.

Alors $h'(t) = |f'(t)|$ et $|f(t)| = \left|\displaystyle\int_0^t f'(u)du\right| \leq \displaystyle\int_0^t |f'(u)|du = h(t)$

Par suite $f^2(x) \leq 2\displaystyle\int_0^x h'(t)h(t)dt = h^2(x)$. On remarque que h est positive croissante, donc h^2 aussi et par suite $f^2(x) \leq h^2(1) = \left(\displaystyle\int_0^1 |f'(u)|du\right)^2$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions $u \mapsto f'(u)$ et $u \mapsto 1$, on a : $\displaystyle\int_0^1 |f'(u)| \leq \sqrt{\displaystyle\int_0^1 f'^2(u)du}$.

Ainsi : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) \leq \sqrt{\displaystyle\int_0^1 f'^2(u)du}$ et par passage au sup on a $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_2$.