Soit (u_n) une telle suite. Soit λ son unique valeur d'adhérence. Supposons que la suite (u_n) est divergente donc elle ne converge pas vers λ, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists q > p, \quad \|u_q - \lambda\| \geq \varepsilon. \quad (1)$$

Ainsi il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\|u_{\varphi(n)} - \lambda\right\| \geq \varepsilon$$

Par hypothèse, la suite (u_n) est bornée, donc il en est de même de la suite $u_{\varphi(n)}$, elle admet une valeur d'adhérence ℓ, donc ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n) et par unicité on a $\ell = \lambda$ donc il existe une extraction γ tel que $u_{\varphi(\gamma(n))} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left\|u_{\varphi(\gamma(n))} - \lambda\right\| < \varepsilon$$

Si on pose $p = \gamma(N)$ on a en même temps $\left\|u_{\varphi(p)} - \lambda\right\| < \varepsilon$ et $\left\|u_{\varphi(p)} - \lambda\right\| \geq \varepsilon$, ce qui est absurde d'où (u_n) converge vers λ.