Exercice : Soient E et F deux espace vectoriels normé , A une partie non vide de E et $f : A \to F$ une application. Démontrer que f est continue sur A si et seulement si pour toute partie X de A on a

$$f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$$

Note : Dans la démonstration on a utilisé des notions[1] de MPSI.

Supposons $f : A \to F$ continue sur A. Soit X une partie de A, montrons que

$$f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$$

Comme f est continue, l'image réciproque de toute partie fermée de F est une partie fermée de A. Or $\overline{f(X)}$ est un fermé de F, donc $M = f^{-1}\left(\overline{f(X)}\right)$ est un fermé de A. Comme

$$f(X) \subset \overline{f(X)}$$

on a

$$X \subset f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}\left(\overline{f(X)}\right)$$

Comme M est un fermé on a alors :

$$\overline{X} \subset f^{-1}\left(\overline{f(X)}\right)$$

Donc

$$f\left(\overline{X}\right) \subset f\left(f^{-1}\left(\overline{f(X)}\right)\right) \subset \overline{f(X)}$$

Réciproquement, supposons que pour tout $X \subset A$, on a :

$$f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)} \tag{1}$$

Soit B une partie fermée de F alors $X = f^{-1}(B)$ est une partie de A, par suite elle réalise (1) donc :

$$f\left(\overline{X}\right) \subset \overline{f\left(X\right)}$$

Or $f(X) = f(f^{-1}(B)) \subset B$ et comme B est fermé on a

$$\overline{f(X)} \subset B$$

donc, compte tenu de (1), on a :

$$f(\overline{X}) \subset B$$

Il en résulte

$$\overline{X} \subset f^{-1}(f(\overline{X})) \subset f^{-1}(B) = X$$

Alors :

$$\overline{X} \subset X$$

ce qui prouve que X est fermé donc l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de A et par suite f est continue sur A.

1. Notamment si $f : E \to F$ est une application alors pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$ et tout $B \in \mathscr{P}(F)$ on a $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$