Crochet de Lie, dualité

4 novembre 2014

Dans tout ce qui suit n est un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque et si $X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose : $[X, Y] = XY - YX$ (crochet de Lie).

1 Dualité : Rappels

1.0.1 Forme linéaire, dual, orthogonal

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie non nulle n.
- On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.
- On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, appelé dual algébrique de E.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle l'orthogonal de F et on note $F^\perp$, le sous-espace vectoriel des formes linéaires $g \in E^*$ tel que $F \subset \ker g$ (autrement dit $g(F) = 0$ c'est-à-dire $g(x) = 0$ pour tout $x \in F$).
- Soit G un sous-espace vectoriel de E^* , l'orthogonal de G est le sous-espace vectoriel de E noté $G^\perp$ des vecteurs x tel que $g(x) = 0$ pour tout $g \in G$.
- On peut démontrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E ou de E^*, on a : $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E) = \dim(E^*) = n$

1.0.2 Isomorphisme $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$

Soit $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$ tel que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M)(X) = \mathrm{tr}(MX)$$

On conviendra de noter φ_M la forme linéaire $\varphi(M)$.
Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), f(M)(X) = [M, X] = MX - XM$$

On notera f_M l'endomorphisme $f(M)$.

Proposition 1 *L'application φ est un isomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vers son dual $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^*$*

Preuve: Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual ont la même dimension, il suffit de prouver que φ est injective. Soit $A \in \ker\varphi$ alors pour toute matrice M on a $\mathrm{tr}(AM) = 0$. Pour $M = E_{ij}$, on a $\mathrm{tr}(AE_{ji}) = \sum_{k=1}^{n}(AE_{ji})_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{ks}\delta_{js}\delta_{ik} = a_{ij}$. Cela montre que $a_{ij} = 0$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$

2 Une proposition

Proposition 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :* $(\ker(f_A))^\perp = \varphi(Im(f_A))$.

Preuve: Soit $\psi \in \varphi(\mathrm{Im}(f_A))$, alors il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\psi = \varphi(AM - MA)$ de sorte que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\psi(X) = \mathrm{tr}((AM - MA)X)$. Soit alors $X \in \ker f_A$, alors $AX = XA$ et par suite

$$\begin{array}{rcl} \psi(X) & = & \mathrm{tr}(AMX) - \mathrm{tr}(MAX) \\ & = & \mathrm{tr}(MXA) - \mathrm{tr}(MAX) \\ & = & \mathrm{tr}(M(XA - AX)) \\ & = & 0 \end{array}$$

Donc $\psi \in (\ker f_A)^\perp$.
On a donc prouvé que $\varphi(\mathrm{Im}(f_A)) \subset (\ker f_A)^\perp$. Par ailleurs on a :

$$\dim(\ker(f_A)^\perp) = n^2 - \dim(\ker(f_A)) = \dim(\mathrm{Im}(f_A))$$

et comme φ est un isomorphisme on a :

$$\dim(\mathrm{Im}(f_A)) = \dim(\varphi(\mathrm{Im}(f_A))).$$

Il en découle que : $\dim(\ker(f_A)^\perp) = \dim(\varphi(\mathrm{Im}(f_A)))$.
On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\mathrm{Im}(f_A)) \subset (\ker f_A)^\perp \\ \dim(\ker(f_A)^\perp) = \dim(\varphi(\mathrm{Im}(f_A))) \end{array} \right. ,$$

donc

$$\varphi(\mathrm{Im}(f_A)) = (\ker f_A)^\perp,$$

ce qui termine la preuve de la proposition.

3 Un exercice

Voici un exercice posé à l'oral de l'ENS (ULM) :
Exercice:
$\mathbb{K}$ est un corps commutatif quelconque. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B = AM - MA$

(2) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AX = XA \Rightarrow \mathrm{tr}(BX) = 0$

On remarque que (1) $\Leftrightarrow \varphi_B \in \varphi(\mathrm{Im}(f_A))$ et que (2) $\Leftrightarrow \varphi_B \in (\ker(f_A))^\perp$. Compte tenu de la proposition 2 ci-dessus l'exercice est résolu.