Épreuve de mathématiques II
Correction

Exercice

1.1 Calculons son polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-3)(X-2)(X-1) - 2 + 2(X-1) - (X-2)$$

$= (X-3)(X-1)(X-2) + X - 2 = (X-2)^2$.

Donc 2 est l'unique valeur propre de A.

1.2 Le système associé à la valeur propre $\lambda = 2$ s'écrit :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2x \\ x + y + z = 2y \\ 2x + 2z = 2z \end{cases}$$

ou encore $x = 0$ ou $y = z$. D'où, $\ker(v - 2id_E) = \{(0, y, y)/y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(0, 1, 1)\}$.

1.3 Un endomorphisme ayant une seule valeur propre est diagonalisable si, et seulement si, c'est une homothétie, or $A \neq 2I_3$, alors v et par conséquent A n'est pas diagonalisable.

Puisque le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, alors A est trigonalisable sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1.4

1.4.1 D'après le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = (A - 2I_3)^3 = 0$, autrement dit $u = v - 2Id_E$ est un endomorphisme nilpotent.

1.4.2 Un vecteur $(x, y, z) \in \ker u^2$ si, et seulement si, $u(x, y, z) \in \ker u = \ker(v - 2id_E) = \text{Vect}\{(0, 1, 1)\}$ ou encore si, et seulement si, $x + y - z = 0$ et $x - y + z = 2x$. Donc le noyau de u^2 est l'hyperplan d'équation $x + y - z = 0$, donc

$$\ker u^2 = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

On a bien $e_1 \notin \ker u^2$.

1.4.3 Soit α, β, γ des réels tels que $\alpha u^2(e_1) + \beta u(e_1) + \gamma e_1 = 0$. En appliquant u^2 et en utilisant le fait que $u^3 = 0$, on obtient $\gamma u^2(e_1) = 0$ et comme $u^2(e_1) \neq 0$, alors $\gamma = 0$. En appliquant une autre fois u, on obtient $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$. Donc $\mathscr{B} = (u^2(e_1), u(e_1), e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a :

- $v(u^2(e_1)) = v(0, 2, 2) = 2v(0, 1, 1) = 4(0, 1, 1) = 2u^2(e_1)$, car $(0, 1, 1)$ est un vecteur propre de v associé à l valeur propre 2,
- $v(u(e_1)) = v(1, 1, 2) = (2, 4, 6) = 2(1, 1, 2) + (0, 2, 2) = u^2(e_1) + 2u(e_1)$,
- $v(e_1) = (3, 1, 2) = (1, 1, 2) + 2(1, 0, 0) = u(e_1) + 2e_1$.

D'où

$$T = \mathrm{Mat}(v, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et T sont liées par la relation $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4.4 On sait que $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$. Calculons d'abord $\exp(T)$. On a $T = 2I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice nilpotente d'indice 3 et $2I_3$ et N commutent, on obtient donc :

$$\exp(T) = \exp(2I_3)\exp(N) = e^2(I_3 + N + \frac{1}{2}N^2) = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^2 & e^2 & -e^2 \\ 2e^2 & e^2 & 0 \\ 3e^2 & e^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problème

Déterminants de Cauchy et de Gram
Application au calcul de la distance à un sous-espace vectoriel

Première partie
Calcul de déterminant de Cauchy

2.1 Si $a_{i_1} = a_{i_2}$ avec $i_1 \neq i_2$, alors les deux lignes correspondantes dans Δ_n sont égales et donc $\Delta_n = 0$.

2.2 Les deux polynômes sont scindés, l'intersection de leurs ensembles des racines est vide, puisque $a_i \neq -b_j$ pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, ..., n\}^2$, donc ils sont premiers entre eux

2.3 **Décomposition en élément simple de la fraction R**

2.3.1 Les pôles de R sont les racines du polynôme $\prod_{k=1}^{n}(X + a_k)$, c'est-à-dire les $(-a_k)_{1\leq k\leq n}$ et comme elles sont distinctes, alors R admet des pôles simples.

2.3.2 Puisque R admet des pôles simples qui sont les $(-a_k)_{1\leq k\leq n}$, et $\deg((X - b_1)...(X - b_{n-1})) < \deg((X + a_1)..(X + a_n))$, la partie entière de R est nulle. R admet donc effectivement une décomposition en éléments simples de la forme

$$R = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X + a_k}.$$

Les α_k sont des réels déterminés par la méthode usuelle dans le cas d'une fraction à pôles simples. En effet, $\alpha_k = \lim\limits_{x\to -a_k}(x+a_k)R(x)$, c'est-à-dire

$$\alpha_k = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(-a_k-b_j)}{\prod\limits_{j\neq k}(-a_k+a_j)} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(a_k+b_j)}{\prod\limits_{j\neq k}(a_k-a_j)}.$$

2.4 **Application au calcul de Δ_n**

2.4.1 On note $L_1, ..., L_n$ les lignes de Δ_n. On effectue sur Δ_n la transformation $L_n \leftarrow \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i L_i$ avec $\alpha_n \neq 0$. On obtient $\Delta_n = \dfrac{1}{\alpha_n}D_n$ où D_n est le déterminant obtenu en remplaçant la dernière ligne de Δ_n par la ligne $(R(b_1), R(b_2), ..., R(b_n))$:

$$\alpha_n\Delta_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_n+b_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_n+b_{n-1}} \\ R(b_1) & \dots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}$$

2.4.2 Il est clair que $R(b_1) = ... = R(b_{n-1}) = 0$, donc en développant D_n suivant sa dernière ligne, on obtient la relation : $\alpha_n\Delta_n = R(b_n)\Delta_{n-1}$.

2.4.3

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} - \frac{1}{(a_1+b_2)(a_2+b_1)}$$

$$= \frac{(a_1-a_2)(b_1-b_2)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_1+b_2)(a_2+b_1)}.$$

On sait que $\Delta_n = \dfrac{R(b_n)}{\alpha_n}\Delta_{n-1}$, avec $\alpha_n = \dfrac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(a_n+b_j)}{\prod\limits_{j\neq n}(a_n-a_j)}$. D'où :

$$\Delta_n = \left[\prod_{k=1}^{n-1}\frac{b_n-b_k}{b_n+a_k}\right]\left[\prod_{k=1}^{n-1}\frac{a_n-a_k}{a_n+b_k}\right]\frac{\Delta_{n-1}}{a_n+b_n}$$

et comme $\Delta_1 = \dfrac{1}{a_1+b_1}$, on en déduit par récurrence sur n la formule fournie par l'énoncé :

$$\Delta_n = \frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\leq i,j\leq n}(a_i+b_j)}$$

Deuxième partie
Matrice et déterminant de Gram
Expression de la distance euclidienne à un sous-espace vectoriel

3.1 Cas $p = 2$, dans ce cas :

$$G(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) \end{pmatrix}.$$

Donc $|G(u_1, u_2)| = \|u_1\|^2\|u_2\|^2 - (u_1|u_2)^2$, ce déterminant est positif d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz. De plus il y a égalité si, et seulement si, u_1 et u_2 sont liés (le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz).

3.2 Le produit symétrique étant symétrique, donc $\forall (i, j) \in \{1, 2, ..., n\}$, $(u_i|u_j) = (u_j|u_i)$ et par conséquent $G(u_1, u_2, ..., u_n)$ est une matrice symétrique.

3.3 **Cas d'une famille liée**

3.3.1 Si $j \neq i$ et $k \neq i$, alors $(w_j|w_k) = (u_j|u_k)$. Si $k \neq i$, $(w_i|w_k) = (u_i|u_k) + \sum_{j\neq i} \lambda_j(u_j|u_k)$, enfin,

$$(w_i|w_i) = (u_i|u_i) + \sum_{k\neq i} \lambda_k(u_i|u_k) + \sum_{j\neq i} \lambda_j(u_j|u_i) + \sum_{k\neq i}\sum_{j\neq i} \lambda_k\lambda_j(u_j|u_k).$$

Donc la ième ligne (resp. colone) de la matrice $G(w_1, w_2, ..., w_p)$ est obtenu en ajoutant à la ième ligne (resp. colone) de la matrice $G(u_1, u_2, ..., u_p)$ une combinaison linéaire des autres, donc le déterminant reste inchangé, ainsi :

$$|G(w_1, w_2, ..., w_p)| = |G(u_1, u_2, ..., u_p)|.$$

3.3.2 Supposons que la famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ est liée, alors l'un des vecteurs u_i s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs :

$$u_i = \sum_{j_neqi} \lambda_j u_j.$$

En considérant le vecteur $w_i = u_i - \sum_{j\neq i} \lambda_j u_j$, qui est nul, on obtient :

$$|G(u_1, ..., u_p)| = |G(w_1, ..., w_i, ...u_p)| = 0.$$

Remarque : La réciproque est vraie aussi, en effet si $|G(u_1, ..., u_p)| = 0$, l'une des colonnes de $G(u_1, ..., u_p)$ qu'on note C_i s'écrit comme combinaisons linéaires des autres colonnes :

$$C_i = \sum_{k\neq i} \lambda_k C_k.$$

Avec la définition de $G(u_1, ..., u_p)$ cela signifie que pour tout $j \in [1, p]$, $(u_j|u_i) = \sum_{k\neq i} \lambda_k(u_j|u_k)$. En passant tous les termes dans un seul membre et par linéarité du produit scalaire, on obtient :

$$(u_j|(u_i - \sum_{k\neq i} \lambda_k u_k)) = 0.$$

En notant $w_i = u_i - \sum_{k\neq i} \lambda_k u_k$, on vient de montrer que $w_i \in \text{Vect}(u_1, ..., u_p)^{\perp}$. Or par sa définition même $w_i \in \text{Vect}(u_1, ..., u_p)$. Ceci montre que $w = 0$ c'est-à-dire que $u_i - \sum_{k\neq i} \lambda_k u_k = 0$ et donc que la famille $(u_1, ..., u_p)$ est liée.

3.4 **Cas d'une famille libre**

3.4.1 Puisque la base $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base orthonormée de $\text{Vect}(u_1, u_2, ..., u_p)$, alors $(u_i|u_j) = \sum_{k=1}^{p} m_{k,i} m_{k,j}$.

3.4.2 D'après ce qui précède, $(u_i|u_j)$ est le coefficient de la ligne i, la colonne j de la matrice ${}^tMM$ et donc $G(u_1, u_2, ..., u_p) = {}^tMM$.

3.4.3 Puisque la famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ est libre alors $|G(u_1, u_2, ..., u_p) \neq 0$. D'autre part, on a $G(u_1, u_2, ..., u_p) = {}^tMM$, donc $|G(u_1, u_2, ..., u_p)| = \det({}^tMM) = \det({}^tM) \times \det(M) = (\det M)^2 > 0$.

3.5 **Application au calcul de la distance à un sous-espace vectoriel**

3.5.1 Dans la dernière colonne de $G(v_1, \ldots, v_n, x)$, le théorème de PYTHAGORE permet d'écrire (puisque $x - p_F(x) \in F^{\perp}$)

$$\begin{pmatrix} (x_1|x) \\ \vdots \\ (x_n|x) \\ (x|x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1|x - p_F(x) + p_F(x)) \\ \vdots \\ (x_n|x - p_F(x) + p_F(x)) \\ \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (x_1|p_F(x)) \\ \vdots \\ (x_n|p_F(x)) \\ \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \|x - p_F(x)\|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x_1|p_F(x)) \\ \vdots \\ (x_n|p_F(x)) \\ (p_F(x)|p_F(x)) \end{pmatrix}$$

Après avoir remplacé aussi les $(x|x_i)$ par $(p_F(x)|x_i)$, on obtient par linéarité par rapport à la dernière colonne

$$|G(v_1, ..., v_n, x)| = |G(v_1, ..., v_n, x - p_F(x),)| + |G(v_1, ..., v_n, p_F(x))|.$$

En développant suivant la dernière colonne, on obtient

$$|G(v_1, ..., v_n, x - p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|^2 |G(v_1, v_2, ..., v_n)|.$$

D'où :

$$|G(v_1, ..., v_n, x)| = |G(v_1, ..., v_n, p_F(x))| + \|x - p_F(x)\|^2 |G(v_1, v_2, ..., v_n)|.$$

3.5.2 Puisque $p_F(x)$ est dans F alors la famille $(p_F(x), v_1, v_2, ..., v_n)$ est liée et donc $|G(v_1, ..., v_n, p_K(x))| = 0$. Il reste finalement :

$$|G(v_1, ..., v_n, x)| = \|x - p_F(x)\|^2 |G(v_1, ..., v_n)|.$$

Ainsi,

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\frac{|G(v_1, ..., v_n, x)|}{|G(v_1, ..., v_n)|}}.$$

3.6 **Un exemple de matrice de Gram**

3.6.1 La matrice représentant les vecteurs $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est triangulaire supérieure à éléments diagonaux non nuls, donc elle est inversible et par conséquent $(v_1, ..., v_n)$ est libre.

3.6.2 Si $i \leq j$, $(v_i|v_j) = \sum_{k=1}^{i}(e_k|e_k) = i$. Ainsi $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]$, $(v_i|v_j) = \min(i, j)$. Ceci montre que $A_n = G(v_1, v_2, ..., v_n)$, donc A_n est une matrice de Gram.

3.6.3 A_n est une matrice symétrique réelle, donc elle est orthogonalement diagonalisable d'après le théorème spectral. Comme A_n est une matrice de Gram, alors il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A_n = {}^tMM$. Soit maintenant λ une valeur propre de A_n et X un vecteur propre non nul associé, donc $AX = \lambda X$ et

$$(A_nX|X) = \lambda(X|X) = \lambda\|X\|^2.$$

Mais $(A_nX|X) = ({}^tMM|X) = (MX|MX) = \|MX\|^2$, d'où :

$$\lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0.$$

Troisième partie
Application au calcul d'un minimum

4.1 Le seul point délicat à vérifier est que $(P|P) = 0$ entraîne $P = 0$. On va utiliser le théorème suivant : si f est continue et positive sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$ sur $[a, b]$. Ici, si $\int_0^1 P^2(t)\mathrm{d}t = 0$, alors Comme $t \mapsto P^2(t)$ est continue et positive sur $[0, 1]$, on en déduit que $P = 0$ sur $[0, 1]$. Donc le polynôme P admet une infinité de racines sur $[0, 1]$, donc il est nul.

4.2 **Calcul d'une distance**

4.2.1 $(P_{n_i}|P_{n_j}) = (X^{n_i}|X^{n_j}) = \displaystyle\int_0^1 t^{n_i+n_j}\mathrm{d}t = \frac{1}{n_i + n_j + 1}$.

4.2.2 Il s'agit d'une famille de polynômes non nuls, de degrés deux à deux distincts, donc est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

4.2.3 $G(P_{n_1}, P_{n_2}, ..., P_{n_p}) = \det\left(\dfrac{1}{n_i + n_j + 1}\right)_{1\leq i,j\leq p} = \dfrac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n}(n_i - n_j)^2}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n+1}(n_i + n_j + 1)}$. (c'est un déterminant de Cauchy avec $a_i = b_i = n_i + \frac{1}{2}$)

4.2.4 On a, après simplification :

$$d(P_r,\mathscr{W}_p)^2=\frac{G(P_{n_1},...,P_{n_p},P_r)}{G(P_{n_1},...,P_{n_p})}=\frac{1}{(2r+1)}\prod_{k=1}^{n}\frac{(r-n_k)^2}{(n_k+r+1)^2}.$$

En prenant la racine carrée, on obtient la formule demandée.

4.3 **Application au calcul d'un minimum**

4.3.1 Pour ce produit scalaire $\displaystyle\int_0^1(1-a_1t-a_2t^2-...-a_nt^n))^2\mathrm{d}t$ est le carré de la distance du polynôme constant 1 au polynôme $a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n$. On doit justifier l'existence de $\inf\left\{\displaystyle\int_0^1(1-a_1t-a_2t^2-...-a_nt^n))^2\mathrm{d}t/(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^n\right\}$ qui est le carré de la distance de 1 à $F=\mathrm{Vect}(X,X^2,...,X^n)$. On sait que cette borne inférieure est un minimum, atteint une et une seule fois quand $a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n$ est la projection orthogonale de 1 sur F.

4.3.2 D'après ce précède, on obtient :

$$\psi(a_1,a_2,...,a_n)=\frac{G(X,X^2,...,X_n,1)}{G(X,X^2,...,X_n)}.$$

Comme $(X^i|X^j)=\dfrac{1}{i+j+1}$, on a $G(1,X,X^2,...,X^n)=\det\left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n+1}$ et $G(X,X^2,...,X^n)=\det\left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. Ces déterminants sont des déterminants de Cauchy, donc

$$G(1,X,X^2,...,X^n)=\frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n+1}(i-j)^2}{\prod\limits_{1\leq i,j\leq n+1}(i+j+1)}\text{ et }G(X,X^2,...,X^n)=\frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(i-j)^2}{\prod\limits_{1\leq i,j\leq n+1}(i+j+1)}.$$

D'où :

$$\psi(a_1,a_2,...,a_n)=d(1,F)=\frac{\prod\limits_{1\leq i\leq n}\left[i-(n+1)\right]^2}{(n+1)!^2}=\frac{1}{(n+1)^2}.$$

••••••••• •