Concours Commun Mines-Ponts 2019 MP 1

1. Nous allons utiliser ici que le rayon de convergence d'une série entière est supérieur à tout réel $x > 0$ en lequel cette série entière converge. Il suffira alors de montrer que ces séries entières convergent simplement sur $\mathbb{R}_+$ pour affirmer que leurs rayons sont infinis.

   Fixons $x > 0$, et posons $u_n(x) = \frac{(pn)^r}{(pn)!}x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

   $$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(1+n^{-1})^r x}{\prod_{k=1}^{p}\big(pn+k\big)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{(pn)^p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   La règle de D'Alembert nous assure alors que la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge. De même, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!}x^{pn}$ converge également puisque la suite des sommes partielles de cette dernière est égale à la suite des sommes partielles $\sum_{n\geq 1} u_n\big(x^p\big)$ dont nous venons de prouver la convergence.

2. ▷ ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée en $t > 1$ vaut

   $$\phi_x'(t) = (1-r)t^{-r}(t-1)^r + t^{1-r}r(t-1)^{r-1} = (t-1)^{r-1}t^{-r}\big(t-(1-r)\big),$$

   quantité dont le signe est positif puisqu'il est aussi celui de $t-(1-r) > 1-(1-r) = r > 0$. ϕ_x est par conséquent une fonction strictement croissante de $\phi_x(1) = -x < 0$ à $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi_x(t) = +\infty$ ($\phi_x(t)$ est en effet équivalente en $+\infty$ à t). D'après le théorème des valeurs intermédiaires (ϕ_x est évidemment continue et $[1, +\infty[$ est un intervalle) et sa stricte monotonie, ϕ_x réalise une bijection de $[1, +\infty[$ dans $[-x, +\infty[$ et s'annule par conséquent une et une seule fois, en un réel que nous noterons $t_x > 1$.

   ▷ $u_1(x) > 0 = u_0(x)$. De plus, si $n \geq 2$,

   $$u_n(x)-u_{n-1}(x) = x^{n-1}\frac{n^r}{n!}\left(x - \left(\frac{n-1}{n}\right)^r n\right) = x^{n-1}\frac{n^r}{n!}\left(x-(n-1)^r n^{1-r}\right) = -x^{n-1}\frac{n^r}{n!}\phi_x(n).$$

   D'après l'étude des variations de ϕ_x, si $n \leq \lfloor t_x \rfloor, n \leq t_x$, si bien que $\phi_x(n) \leq 0$ et $u_n(x) \geq u_{n-1}(x)$. Si maintenant $n > \lfloor t_x \rfloor$, alors $n > t_x$ et alors $u_n(x) \leq u_{n-1}(x)$.

3. ▷ Effectuons un développement limité de $\phi_x(x+\alpha)$ lorsque $x \to +\infty$:

   $$\begin{aligned} \phi_x(x+\alpha) &= (x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r - x = x\Big[\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r}\left(1+\frac{\alpha-1}{x}\right)^r - 1\Big] \\ &= x\Big[\left(1+\frac{\alpha(1-r)}{x}\right)\left(1+\frac{r(\alpha-1)}{x}\right) - 1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\Big] = \alpha - r + o(1) \\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} \alpha - r. \end{aligned}$$

   ▷ Fixons $\epsilon > 0$. L'estimation $\phi_x(x+r+\epsilon) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \epsilon > 0$ de la question précédente nous assure de l'existence d'un $x_1 > 1$ tel que si $x \in [x_1, +\infty[, \phi_x(x+r+\epsilon) > \epsilon/2 > 0$. D'après les variations de ϕ_x, on en déduit que $x+r+\epsilon > t_x$. De plus, puisque $\phi_x(x+r-\epsilon) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\epsilon < 0$, il existe $x_2 > 1$ tel que si $x \in [x_2, +\infty[, \phi_x(x+r-\epsilon) < -\epsilon/2 < 0$, si bien que $x+r-\epsilon < t_x$. Tout réel x supérieur à la fois à x_1 et à x_2 vérifie par conséquent $\big|t_x - x - r\big| \leq \epsilon$. Ceci prouve que $t_x - x - r \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

4. $\triangleright$ Rappelons que $x \underset{x\to+\infty}{\sim} \lfloor x \rfloor$. Ainsi, si $k \geq 1$.

$$\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} \quad = \quad \left(1+\frac{k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r \times \frac{x^k}{\prod_{j=1}^k \left(\lfloor x\rfloor + j\right)} \sim 1^r \times \frac{x^k}{\lfloor x\rfloor^k} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

Si $k \leq -1$, la preuve est identique car en posant $j=-k$, $\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} = \left(1-\frac{j}{\lfloor x\rfloor}\right)^r \times \frac{\prod_{i=0}^{j-1}\left(\lfloor x\rfloor - i\right)}{x^j}$.

$\triangleright$ D'après l'équivalent que nous venons d'établir,

$$\frac{\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{\lfloor x\rfloor-k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} n+1.$$

Ainsi par définition même de cette limite, en posant $\epsilon = 1$, on voit qu'il existe $A>0$ tel que pour tout $x \geq A$, $\left|\frac{\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} - n - 1\right| \leq 1$, soit en particulier $\frac{\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} \geq n+1-1 = n$.

5. $\triangleright$ Soit $\epsilon > 0$ et un entier $n \geq \epsilon^{-1}$. L'inégalité précédente nous donne l'existence d'un $A>0$ tel que pour tout $x > A$,

$$0 \leq u_{\lfloor x\rfloor}(x) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} \frac{i^r}{i!}x^i \leq \frac{x^r}{n}\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} \frac{x^i}{i!} \leq \frac{x^r}{n}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!} = \frac{x^r e^x}{n} \leq \epsilon x^r e^x,$$

ce qui prouve que $u_{\lfloor x\rfloor}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^r e^x)$. Le premier item de la question 4./ nous garantiti alors que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)$ est également négligeable devant $x^r e^x$.
Notons que l'estimation pour $k=0$ pouvait aussi s'obtenir avec l'équivalent de Stirling :

$$u_{\lfloor x\rfloor}(x) = \frac{\lfloor x\rfloor^r}{\lfloor x\rfloor!}x^{\lfloor x\rfloor} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\lfloor x\rfloor^r}{\sqrt{2\pi\lfloor x\rfloor}\left(\frac{\lfloor x\rfloor}{e}\right)^{\lfloor x\rfloor}} x^{\lfloor x\rfloor} \underbrace{= o\left(\lfloor x\rfloor^r e^{\lfloor x\rfloor}\right)}_{\text{car } \lfloor x\rfloor \to +\infty} \underbrace{= o\left(x^r e^x\right)}_{\text{car } \lfloor x\rfloor \leq x}.$$

$\triangleright$ D'après la question précédente, quitte à prendre x suffisamment grand, on peut supposer que $|t_x - x - r| < 1$, soit $-1+x+r < t_x < 1+x+r$. Alors,

$$\underbrace{-1+\lfloor x\rfloor+\lfloor r\rfloor}_{\in\mathbb{Z}} \leq -1+x+r \leq t_x \Longrightarrow -1+\lfloor x\rfloor+\lfloor r\rfloor \leq \lfloor t_x\rfloor \tag{1}$$

De plus, la fonction "partie entière" étant croissante,

$$t_x < 1+x+r \Longrightarrow \lfloor t_x\rfloor \leq \lfloor 1+x+r\rfloor = 1+\lfloor x+r\rfloor \leq 2+\lfloor x\rfloor+\lfloor r\rfloor. \tag{2}$$

Pour cette dernière inégalité, nous avons utilisé le fait que pour tous réels a et b, $\lfloor a+b\rfloor \leq \lfloor a\rfloor+\lfloor b\rfloor+1$. Il suffit pour le voir d'écrire que $a = \lfloor a\rfloor+\alpha$ et $b=\lfloor b\rfloor+\beta$, où $0 \leq \alpha,\beta < 1$, et d'en déduire que $\lfloor a\rfloor+\lfloor b\rfloor \leq a+b = \lfloor a\rfloor+\lfloor b\rfloor+\alpha+\beta < \lfloor a\rfloor+\lfloor b\rfloor+2$.
Nous avons montré avec les estimations (1) et (2) que $\lfloor t_x\rfloor = \lfloor x\rfloor + i$ où $i \in [\![\lfloor r\rfloor-1, \lfloor r\rfloor+2]\!]$.
Ceci est équivalent à l'indication suggérée entre parenthèses puisque $M_x = u_{\lfloor t_x\rfloor}(x)$.

▷ Ainsi, $\frac{M_x}{x^r e^x} = \max_{\lfloor r\rfloor -1\leq i\leq \lfloor r\rfloor +2} \frac{u_{\lfloor x\rfloor +i}}{x^r e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, en tant que maximum de quatre fonctions de x tendant toutes vers 0.

6. ▷ En tenant compte de la nullité de $u_0(x)$ et de $D_{n+1} - D_n = z^n$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D_n\big(u_{n-1}(x) - u_n(x)\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_{n+1}u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n u_n(x) = S_{r,1}(zx).$$

Notons, par souci de précision, que ces séries convergent car $\sum_n |u_n(x)|$ converge, $(D_n)_n$ est bornée, et $\sum_n (u_n - u_{n-1})$ converge aussi.

▷

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(zx)^n\frac{n^r}{n!}\right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}|D_n|\big|u_{n-1}(x) - u_n(x)\big| = \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right|\big|u_{n-1}(x) - u_n(x)\big| \\ &= \frac{2}{|1-z|}\sum_{n=1}^{+\infty}\big|u_{n-1}(x) - u_n(x)\big|.\end{aligned}$$

Notons que cette dernière série converge bien car la suite $(u_n(x)_n$ décroit vers 0. De plus, en utilisant son changement de monotonie en t_x, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\big|u_{n-1}(x) - u_n(x)\big| &= \sum_{n=1}^{\lfloor t_x\rfloor}\big|u_{n-1}(x) - u_n(x)\big| + \sum_{n=\lfloor t_x\rfloor+1}^{+\infty}\big|u_{n-1}(x) - u_n(x)\big| \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\lfloor t_x\rfloor}\big(u_n(x) - u_{n-1}(x)\big)}_{=u_{\lfloor t_x\rfloor}(x)=M_x} + \underbrace{\sum_{n=\lfloor t_x\rfloor+1}^{+\infty}\big(u_{n-1}(x) - u_n(x)\big)}_{=u_{\lfloor t_x\rfloor}(x)=M_x} = 2M_x.\end{aligned}$$

L'estimation $S_{r,1}(zx) = o(x^r e^x)$ est alors une conséquence immédiate de cette majoration et du deuxième item de la question 5.

7. ▷ Commençons par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{p-1}\zeta^{kn} = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\exp\dfrac{2i\pi n}{p}\right)^k$ est une somme géométrique. Elle est par conséquent égale à p lorsque n est un multiple de p, et à 0 dans le cas contraire car $= \frac{1-e^{2i\pi n}}{1-e^{2i\pi n/p}}$. L'interversion des deux sommes dans la ligne suivante est licite car l'une d'entre elles porte sur un nombre fini de termes :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}\sum_{k=0}^{p-1}\left(\exp\frac{2i\pi n}{p}\right)^k x^n = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ n\equiv 0[p]}}\frac{n^r}{n!}px^n,$$

et cette somme est égale, en posant $n = pm$, à $\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{p^r m^r}{(pm)!}px^{pm} = pS_{r,p}(x)$.

▷ Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, ζ^k est un nombre complexe de module 1 différent de 1 si bien que d'après la question 6, $\sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = o(x^r e^x)$. Or, nous venons de montrer que cette somme est égale à $S_{r,1}(x) - pS_{r,p}(x)$. Ainsi, si $(H_{r,1})$ est vérifiée, $S_{r,1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r e^x$, et on en déduit que $pS_{r,p}(x) = S_{r,1}(x) - \big(S_{r,1}(x) - pS_{r,p}(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r e^x$, i.e que $(H_{r,p})$ est également vérifiée. L'autre implication fonctionne de même.

8. C'est une application de l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, licite ici car X_x est une variable aléatoire de Poisson de paramètre x, et admet donc une variance et une espérance toutes deux égales à x :

$$\mathbf{P}\big(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}\big) \leq \frac{\text{Var}(X_x)}{\alpha^2 x^{4/3}} = \alpha^{-2} x^{-1/3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

9. Attention au fait que les inégalités qui suivent portent sur des variables aléatoires :

$$0 \quad \leq \quad A_x = \mathbf{1}_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})} Z_x^r \leq \mathbf{1}_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})} 1^r = \mathbf{1}_{(X_x < x - x^{2/3})} \leq \mathbf{1}_{(|X_x - x| > x^{2/3})}$$

L'espérance étant une fonctionnelle croissante sur l'ensemble des variables aléatoires admettant une espérance, on obtient naturellement $0 \leq \mathbf{E}(A_x) \leq \mathbf{P}\big(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}\big)$, et donc $\boxed{\mathbf{E}(A_x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$ d'après Q8.

Puisque $(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}) = (1 - x^{-1/3} \leq Z_x \leq 1 + x^{-1/3})$,

$$\mathbf{1}_{\left(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}\right)} \left(1 - x^{-1/3}\right)^r \leq B_x \leq \mathbf{1}_{\left(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}\right)} \left(1 + x^{-1/3}\right)^r$$

d'où l'on tire en prenant à nouveau les espérances :

$$\mathbf{P}\big(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}\big)\big(1 - x^{-1/3}\big)^r \leq \mathbf{E}(B_x) \leq \mathbf{P}\big(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}\big)\big(1 + x^{-1/3}\big)^r$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{P}\big(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}\big)\big(1 - x^{-1/3}\big)^r = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{P}\big(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}\big) = 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{P}\big(|Z_x - 1| > x^{-1/3}\big) = 1$ d'après Q8, et de même pour le terme de droite, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{E}(B_x) = 1}$.

10. ▷ $Y_{N,x}$ est d'espérance finie car elle est positive et majorée par $\prod_{k=0}^{N-1}(X_x - k)$ qui est un polynôme en X_x. Puisque $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel, il suffit donc de justifier que X_x^k admet une espérance pour tout $k \in \mathbb{N}$, i.e que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-x} \frac{x^n n^k}{n!}$ converge. Mais ceci est clair à nouveau grâce à D'Alembert puisque $\dfrac{e^{-x} \frac{x^{n+1}(n+1)^k}{(n+1)!}}{e^{-x} \frac{x^n n^k}{n!}} = x \dfrac{(n+1)^{k-1}}{n^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

$\triangleright$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big(Y_{N,x}\big) &= \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\mathbf{1}_{\left(j>x+x^{2/3}\right)}\prod_{k=0}^{N-1}(j-k)\right)\mathbf{P}(X_x=j) \text{ d'après le théorème de transfert}\\
&= \sum_{j=N}^{+\infty}\left(\mathbf{1}_{\left(j>x+x^{2/3}\right)}\prod_{k=0}^{N-1}(j-k)\right)\mathbf{P}(X_x=j), \text{ car } \prod_{k=0}^{N-1}(j-k)=0 \text{ lorsque } j\leq N-1\\
&= \sum_{\substack{j\geq N\\ j>x+x^{2/3}}}\left(\prod_{k=0}^{N-1}(j-k)\right)\mathbf{P}(X_x=j) = \sum_{\substack{j\geq N\\ j>x+x^{2/3}}}\left(\prod_{k=0}^{N-1}(j-k)\right)\frac{e^{-x}x^j}{j!}\\
&= \sum_{\substack{j\geq N\\ j>x+x^{2/3}}}\frac{j(j-1)\dots(j-N+1)}{j!}e^{-x}x^j = \sum_{\substack{j\geq N\\ j>x+x^{2/3}}}\frac{e^{-x}x^j}{(j-N)!}\\
&= \sum_{k>x+x^{2/3}-N}\frac{e^{-x}x^{N+k}}{k!} \text{ en posant } j=N+k\\
&= x^N\sum_{k>x+x^{2/3}-N}\frac{e^{-x}x^k}{k!} = x^N\mathbf{P}\big(X_x>x+x^{2/3}-N\big).
\end{aligned}$$

$\triangleright$ Il existe $A>0$ tel que tout réel $x>A$ vérifie $x^{2/3}-N\geq x^{2/3}/2$. Pour de tels x,

$$\mathbf{P}\big(X_x>x+x^{2/3}-N\big)=\mathbf{P}\big(X_x-x>x^{2/3}-N\big)\leq\mathbf{P}\big(|X_x-x|>x^{2/3}-N\big)\leq\mathbf{P}\big(|X_x-x|>(1/2)x^{2/3}\big),$$

quantité qui tend vers 0 lorsque $x\to+\infty$ d'après la question 8, en posant $\alpha=1/2$. Ainsi, $\boxed{\mathbf{E}(Y_{N,x})=o(x^N)}$.

11. $\triangleright$ L'hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}_N[X]$ des polynômes s'annulant en 0 contient les vecteurs de la famille $\mathcal{F}=(H_1,H_2,\dots,H_n)$ où pour tout $k\in[\![1,N]\!]$, $H_k(X)=X(X-1)\dots(X-k+1)$. Or, cette famille est libre puisque ses vecteurs sont de degrés distinct deux à deux et elle contient $N=\dim\mathcal{H}$ vecteurs. $\mathcal{F}$ est donc une base de $\mathcal{H}$. Puisque $X^N\in\mathcal{H}$, il existe bien des réels $a_1,\dots,a_N$ tels que $X^N=\sum_{k=1}^N a_kX(X-1)\dots(X-k+1)$. Ainsi,

$$\mathbf{1}_{\left(X_x>x+x^{2/3}\right)}X_x^N=\sum_{k=1}^N a_k\underbrace{\mathbf{1}_{\left(X_x>x+x^{2/3}\right)}X_x(X_x-1)\dots(X_x-k+1)}_{=Y_{k,x}}$$

$\triangleright$ $\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\left(Z_x>1+x^{-1/3}\right)}Z_x^N\right)=x^{-N}\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\left(X_x>x+x^{2/3}\right)}X_x^N\right)=x^{-N}\sum_{k=1}^N a_k\underbrace{\mathbf{E}\big(Y_{k,x}\big)}_{=o(x^k)\in o(x^N)}=o(1)$ quand $x\to+\infty$.

12. $\triangleright$ Soit N un entier supérieur à r. Lorsque $z>1+x^{-1/3}$, $z>1$ et donc $z^r<z^N$. On en déduit l'inégalité $0\leq\mathbf{1}_{\left(Z_x>1+x^{-1/3}\right)}Z_x^r\leq\mathbf{1}_{\left(Z_x>1+x^{-1/3}\right)}Z_x^N$, et donc $0\leq\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\left(Z_x>1+x^{-1/3}\right)}Z_x^r\right)\leq\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\left(Z_x>1+x^{-1/3}\right)}Z_x^N\right)$. La question précédente induit ainsi $\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\left(Z_x>1+x^{-1/3}\right)}Z_x^r\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

▷ Puisque $Z_x^r = A_x + B_x + \mathbf{1}_{\left(Z_x > 1 + x^{-1/3}\right)} Z_x^r$, on déduit bien de la question 9 et du premier item de cette question 12 que $\mathbf{E}(Z_x^r) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$.

▷ $\mathbf{E}(Z_x^r) = x^{-r}\mathbf{E}(X_x^r) = x^{-r}e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r x^n}{n!}$ tend vers 1, i.e $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r x^n}{n!} \underset{x \to +\infty}{\sim} e^x x^r$.

13. ▷ Puisque $\big(p(n+1)\big)^r \underset{n \to +\infty}{\sim} (pn)^r$ et $\big(p(n+1)\big)! = \left[\prod_{k=0}^{p-1} \big(p(n+1) - k\big)\right](pn)! \underset{x \to +\infty}{\sim} (pn)^p (pn)!$, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\left(p(n+1)\right)^r}{\left(p(n+1)\right)!}$ et $b_n = \frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!}$, ces deux suites sont bien équivalentes et strictement positives pour $n \geq 1$. De plus, $\sum_n b_n y^n$ est une série entière de rayon de convergence infini puisque $0 \leq b_n \leq \frac{(pn)^r}{(pn)!}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} y^n$ a déjà un rayon infini d'après la question 1. On déduit du lemme de comparaison asymptotique des séries entières que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(p(n+1)\right)^r}{\left(p(n+1)\right)!} y^n \underset{y \to +\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!} y^n$. En posant $y = x^p$, on obtient

$$S_{r,p}(x) = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\big(p(n+1)\big)^r}{\big(p(n+1)\big)!} x^{np} \underset{x \to +\infty}{\sim} x^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(pn)^{r-p}}{(pn)!} x^{np} = x^p S_{r-p,p}(x).$$

▷ Ainsi, si $S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^r e^x}{p}$, $S_{r-p,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{-p} S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^{r-p} e^x}{p}$, ce qui est exactement l'énoncé de $(H_{r-p,p})$.

▷ On sait grâce à la question 12 que pour tout réel $r > 0, (H_{r,1})$ est valide. Grâce à la question 7, on en déduit que $(H_{r,p})$ est valide pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $r > 0$. Il reste à prouver que c'est encore valide lorsque $r \leq 0$. Or pour un tel réel r, $r + p$ est un entier strictement positif si on pose $p = -\lfloor r \rfloor + 1$, si bien que $(H_{r+p,p})$ est vérifié, et donc $(H_{r,p})$ l'est aussi.

14. $v_n - v_{n-1} = \ln n + x \ln \frac{n-1}{n} - \ln(x+n) = -\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{x}{n}\right) - x\left(-\frac{1}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est bien le terme général d'une série absolument convergente. On sait que ceci induit la convergence de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$. La suite $(e^{v_n})_{n\geq 1}$ converge donc aussi vers un réel $\Gamma(x) > 0$ en tant qu'exponentielle d'un réel (on utilise ici la continuité de la fonction exponentielle, mais au vu de la difficulté des questions précédentes, nul doute qu'on nous en fera grâce). Puisque $v_n = \ln \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$, on a bien $\prod_{k=0}^n (x+k) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^x n!}{\Gamma(x)}$.

15. Enfin une question simple : c'est une conséquence immédiate du théorème de Cauchy sur les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2, à coefficients continus sur $\mathbb{R}$, résolues (ouf !), ce qu'est celle-ci.

16. Supposons que cette EDL admette une solution développable en série entière $f : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ de rayon de convergence infini telle que $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Alors, la dérivée seconde de f est égale sur $\mathbb{R}$ à $t \longmapsto \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)t^{n-2}$ d'après un résultat classique sur les séries entières, et en injectant dans l'EDL, on trouve que pour tout réel t, $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)t^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1}$, soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^n$. Par unicité du développement en série entière (le rayon est bien non nul), on en déduit la nullité de a_2 et l'égalité $a_{n+2}(n+2)(n+1) = a_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or, a_1 et a_2 étant nuls, une récurrence bête nous informe que a_n l'est aussi dès que

n est congru à 1 ou 2 modulo 3. De plus, si $n = 3k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{3k} = \frac{a_{3k-3}}{3k(3k-1)}$, soit

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{3n} = \left(\prod_{k=1}^{n}(3k)(3k-1)\right)^{-1} = \left(3^n n! \prod_{k=0}^{n-1}(3k+2)\right)^{-1}.$$

Réciproquement, si on pose $g : t \in \mathbb{R} \longmapsto 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{3^n n! \prod_{k=0}^{n-1}(3k+2)}$, cette fonction est bien définie car le rayon de convergence de la série entière est égal à $+\infty$, d'après la règle de D'Alembert (je vous laisse le vérifier). De plus, nos calculs se remontent sans obstacle, si bien que g est une solution de l'équation différentielle valant 1 en 0 et de dérivée nulle en 0. D'après la question 15, f est égale à g sur $\mathbb{R}$. On a bien montré que f était développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

17. ▷ $\prod_{k=0}^{n-1}(3k+2) = 3^n \prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{2}{3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3^n n^{2/3}(n-1)!}{\Gamma(2/3)}$ d'après la question 14. Ainsi,

$$a_{3n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(3^n n! \frac{3^n n^{2/3}(n-1)!}{\Gamma(2/3)}\right)^{-1} = \frac{\Gamma(2/3)n^{1/3}}{9^n (n!)^2}.$$

▷ D'après l'équivalent de Stirling, $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$ et $(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$, si bien que $\frac{1}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{(2n)!\sqrt{\pi n}}$, et en injectant dans la formule du premier item de cette question, nous obtenons bien que $a_{3n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{-1/6}\frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\frac{1}{(2n)!}$.

18. D'après le lemme de comparaison asymptotique des séries entières et l'équivalent qui précède,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{3n}t^{3n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1/6}\frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\frac{1}{(2n)!}t^{3n} = \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{-1/6}}{(2n)!}\left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right)^{2n} \\
&= \frac{2^{1/6}\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)^{-1/6}}{(2n)!}\left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right)^{2n} = \frac{2^{1/6}\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}}S_{-1/6,2}\left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right) \\
&\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2^{1/6}\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right)^{-1/6}\exp\left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right) = Ct^{-1/4}\exp\left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right) \\
&\text{où } \boxed{C = \frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{2\sqrt{\pi}}}.
\end{aligned}$$