I :Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A-

Q1. $\chi_M = det(XI_n - M) = det((XI_n - M)^T) = det(XI_n - M^T) = \chi_{M^T}$, donc $Sp(M) = Sp(M^T)$.

Q2. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale tel que $M = PDP^{-1}$, donc par transposée, on obtient $M^T = (P^{-1})^T D^T P^T = (P^T)^{-1} D P^T$, donc M^T est aussi diagonalisable.
En inversant les rôles de M et M^T, on aura l'autre implication, ce qui assure l'équivalence.

I.B-Matrices compagnons

Q3. $$\chi_{C_Q} = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

En efféctuant l'opération élémentaire $L_1 \longleftarrow L_1 + \sum_{k=1}^{n-1} X^k L_{k+1}$, on obtient

$$\chi_{C_Q} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & Q(X) \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix},$$

et par développement par rappport à la première ligne, on obtient

$$\chi_{C_Q} = (-1)^{n+1} Q(X) \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} Q(X) (-1)^{n-1} = Q(X)$$

Q4. Soit $\lambda \in Sp(Q^T)$.

$$Q^T - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$rg(Q^T - \lambda I_n) \geq n-1$ et puisque λ est une valeur propre, $rg(Q^T - \lambda I_n) \leq n-1$, donc $rg(Q^T - \lambda I_n) = n-1$, donc $dim(Ker(Q^T - \lambda I_n)) = 1$.
Soit $X = (x_1, ..., x_n)^T \in Ker(Q^T - \lambda I_n)$, alors on a le système $\forall k \in [[1, n-1]],\ -\lambda x_k + x_{k+1} = 0$, donc $\forall k \in [[2, n]],\ x_k = \lambda^{k-1} x_1$, c'est à dire $Ker(Q^T - \lambda I_n) = Vect(V_\lambda)$ où $V_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, ..., \lambda^{n-1})^T$.

I.C- Endomorphismes cycliques

Q5. $\Longrightarrow$ Si f est cyclique, alors E admet une base de la forme $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$, donc la matrice de f dans cette base est C_Q, où $Q = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ avec $f^n(x_0) = -\sum_{k=0}^{k-1} a_k f^k(x_0)$.

$\Longleftarrow$ Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, alors $\forall k \in [[1, k-1]]$, $f(e_k) = e_{k+1}$, donc $\forall k \in [[2, n-1]],\ e_k = f^{k-1}(e_1)$ et par suite $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), ..., f^{n-1}(e_1))$ d'où f est cyclique.

Q6. $\Longrightarrow$ Soit f diagonalisable. f étant cyclique, donc d'après $Q5.$, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, alors C_Q^T est diagonalisable par la question $Q2.$, donc

$\forall \lambda \in Sp(C_Q^T) = Sp(C_Q) = Sp(f)$, $dim(Ker(Q^T - \lambda I_n)) = 1 = m(\lambda)$,

c'est à dire λ est une racine simple de $\chi_{C_Q^T} = \chi_{C_Q} = \chi_f$.

En définitive χ_f est scindé à racines simples.

$\Longleftarrow$ Si χ_f est scindé à racines simples, alors f est annulée par un polynoôme scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.

Q7. • Si la famille $(id_E, f, ..., f^{n-1})$ est liée alors $\forall x \in E$, $(x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ est liée, ce qui contredit que f est cyclique qui exige l'existence de $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E

• Soit d le degré de π_f et supposons que $d \leq n-1$, alors $(id, f, ..., f^d)$ est liée, donc $(id, f, ..., f^{n-1})$ est aussi liée comme surfamille d'une famille liée, ce qui contredit sa liberté déjà montrée , et par suite $d \geq n$, de plus on a toujours $d \leq n$, donc $d = n$.

I.D- Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

Q8.

L'ensemble $I_x = \{k \in \mathbb{N}^* \ / \ (x, f(x), ..., f^{k-1}(x))$ est libre$\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 1 et majorée par $n = dim(E)$, donc admet un maximum $p \in \mathbb{N}^*$, et par suite $p \in I_x$ et $p+1 \notin I_x$, c'est à dire $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre et $(x, f(x), ..., f^p(x))$ est liée,ce qui assure l'existence des $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Q9. Posons $F = Vect(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$.

$f(F) = Vect(f(x), ..., f^{p-1}(x), f^p(x)))$, or $f^p(x) \in Vect(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))) = F$, donc F est stable par f.

Q10. Notons $Q = X^p + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + ... + \alpha_0$ et f_p l'endomorphisme induit par f sur F, alors $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ est une base de F et la matrice de f_p dans cette base est C_Q, donc $\chi_{f_p} = \chi_{C_Q} = Q$ divise χ_f.

Q11. Soit $x \in E$ non nul. On garde les mêmes notations des trois questions précédentes, on aura Q divise χ_f , donc $\chi_f = QR$, or $Q(f)(x) = 0$, donc $\chi_f(f)(x) = R(f)(Q(f)(x)) = R(f)(0) = 0$, donc pour tout $x \in E$ non nul, $\chi_f(f)(x) = 0$, de plus $\chi_f(f)(0) = 0$, donc $\chi_f(f)$ est nul sur E.

II Étude des endomorphismes cycliques

II.A Endomorphismes cycliques nilpotents

Q12. f étant nilpotent d'indice de nilpotence r, donc de polynôme minimal $\pi_f = X^r$.

$\Longrightarrow$ Si f est cyclique, alors d'après la question $Q7.$, $deg(\pi_f) = n$, donc $r = n$.

$\Longleftarrow$ Si n est l'indice de nilpotence, alors $f^{n-1} \neq 0$, ce qui entraine l'existence de $x \in E$ non nul tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

On a alors $\mathcal{B} = (x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ est libre. En effet soit $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x) = 0$, alors si les α_k ne sont pas tous nuls, considérons p le plus petit indice tel que $\alpha_k \neq 0$, on aura $\sum\limits_{k=p}^{n-1} \alpha_k f^k(x) = 0$, ce qui donne en prennant l'image par f^{n-1-p}, $\alpha_p f^{n-1}(x) = 0$ qui contredit le fait que $\alpha_p \neq 0$ et $f^{n-1}(x) \neq 0$.

$\mathcal{B}$ est donc une base de E, ce qui rend f cyclique et sa matrice dans cette base est de la forme C_Q où $Q = X^n$.

II.B

Q13. • $(f - \lambda_k Id_E)^{m_k}$ est un polynôme en f, donc $F_k = Ker((f - \lambda_k Id_E)^{m_k})$ est stable par f.

• Les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont premiers entre eux et $\chi_f(f) = 0$, alors par le lemme des noyaux, on aura $E = F_1 \oplus ... \oplus F_p$.

Q14. La stabilité de F_k par f rend φ_k un endomorphisme de F_k, de plus $\forall x \in F_k$, $(f - \lambda_k Id_E)^{m_k}(x) = 0$, c'est à dire $\varphi_k^{m_k}$ est nul sur F_k, donc φ_k est nilpotent.

Q15. X^{ν_k} est le polynôme minimal de φ_k, donc $\nu_k = deg(\pi_{\varphi_k}) \leq dim(F_k)$.

Q16. Notons ψ_k l'endomorphisme induit par f à F_k, alors la question précédente assure que $\pi_{\psi_k} = (X - \lambda_k)^{\nu_k}$ et puisque E est somme directe des F_k, on a $\pi_f = ppcm((X - \lambda_1)^{\nu_1}, ..., (X - \lambda_p)^{\nu_p}) = \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\nu_k}$.

Or l'hypothèse $(id_E, f, ..., f^{n-1})$ est libre entraine que $\chi_f = \pi_f$, ce qui exige $\nu_k = m_k$.

Q17. • Des deux questions pécédentes, on tire que pour tout $k \in [[1, p]]$, $dim(F_k) \geq m_k$ et puisque $\sum\limits_{k=1}^{p} dim(F_k) = \sum\limits_{k=1}^{p} m_k = n$, on aura $\sum\limits_{k=1}^{p} (dim(F_k) - m_k) = 0$ somme nulle de termes positifs, donc $\forall k \in [[1, p]]$ $dim(F_k) = m_k$.

• φ_k étant nilpotent d'indice de nilpotence $\nu_k = m_k = dim(F_k)$, donc d'après la question $Q12.$, φ_k est cyclique et sa matrice dans une base bien choisie est de la forme $C_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc la matrice de ψ_k dans cette base est $D_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$,

et par suite la matrice de f dans cette base est diagonale par blocs, contenant p locs chacun de taille m_k.

Q18. • Posons $v_1 = u_1$, $v_2 = u_{m_1+1}$,..., $v_p = u_{m_1+\ldots+m_{p-1}+1}$, alors $\forall k \in [[1,p]],\ v_k \in F_k$, donc par définition $(f - \lambda_k Id_E)^{m_k}(v_k) = 0$, ce qui entraine $\chi_f(f)(v_k) = 0$ et par suite par linéarité $\chi_f(f)(x_0) = 0$.

• D'autre part soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(f)(x_0) = 0$, alors par linéarité $\sum_{k=1}^{p} Q(f)(v_k) = 0$, or par stabilité $Q(f)(v_k) \in F_k$, et vu que les F_k sont en somme directe, on aura $\forall k \in [[1,p]]\ Q(f)(v_k) = 0$.
La division euclidiènne de Q par $(X-\lambda_k)^{m_k}$ donne l'existence de $q, r \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q = q(X-\lambda_k)^{m_k} + r$ avec $deg(r) \leq m_k - 1$, or $(f - \lambda_k id_E)^{m_k}(v_k) = 0$, donc $r(f)(v_k) = 0$ et par suite r ne peut être non nul, puisque $(v_k, f(v_k), ..., f^{m_k-1}(v_k))$ est une base de F_k, d'où $r = 0$ et par suite $(X-\lambda_k)^{m_k}$ divise Q.

Les polynômes $(X-\lambda_k)^{m_k}$ sont premiers entre eux, ce qui entraine $\chi_f = \prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{m_k}$ divise Q.

En définitive l'ensemble des polynômes Q est l'idéal engendré par χ_f.

Q19. D'après la question précédente, $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de E, donc f est cyclique.

III Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

Q20. • $Id_E o f = f o Id_E$, donc $Id_E \in \mathcal{C}(f)$.
• $\forall g, h \in \mathcal{C}(f)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $(g + \alpha h) o f = g o f + \alpha h o f = f o g + \alpha f o h = f o (g + \alpha h)$, donc $g + \alpha h \in \mathcal{C}(f)$.
• $\forall g, h \in \mathcal{C}(f)$, $(g o h) o f = g o (h o f) = g o (f o h) = (g o f) o h = (f o g) o h = f o (g o h)$, donc $g o h \in \mathcal{C}(f)$.
on conclut que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

III.A - Commutant d'un endomorphisme cyclique

Q21. L'existence des λ_k vient de l'écriture du vecteur $g(x_0)$ dans la base $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$.

Q22. On va montrer que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$.

Par la question précédente, ces deux endomorphismes coincident en x_0.

De plus puisque $g \in \mathcal{C}(f)$, pour tous $j \in [[1, n-1]]$, $g(f^j(x_0)) = f^j(g(x_0)) = f^j(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)) = (\sum_{k=0}^{n-1} f^k)(f^j(x_0))$, alors ces deux endomorphismes coincident sur la base $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$, donc $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$.

Q23. On vient de montrer l'implication directe, et puisque tout polynôme de f commute avec f, on a la réciproque.

III.B - Décomposition de Frobenius

Q24. On va le montrer par récurrence sur la dimension de $F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_r$.

• Si $dim \bigcup_{j=1}^{r} F_j = 1$, alors $\exists i \in [[1,r]]$ tel que $dim(F_i) = 1$, donc $F_i = \bigcup_{j=1}^{r} F_j$ contient tous les autres F_k.

• Supposons le résultats est vrai pour $dim(\bigcup_{j=1}^{r} F_j) = p$ et supposons que $dim(F) = p+1$, où on a posé $F = \bigcup_{j=1}^{r} F_j)$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\forall j \in [[1,r]],\ F_j \neq F$.

Considérons un hyperplan H de $F = \bigcup_{j=1}^{r} F_j$, alors $H = H \cap F = \bigcup_{j=1}^{r} (F_j \cap H)$ et $dim(H) = p$ comme sous-espace vectoriel de F, donc par hypothèse de récurrence, $\exists i \in [[1,r]]$ tel que $H \cap F_i$ contient tous les $H \cap F_k$ et par suite $H \cap F_i = H$, ce qui exige que $H \subset F_i$ et puisque $F_i \neq F$, on aura grâce aux dimensions $F_i = H$.

Ainsi tout hyperplan de F est l'un des F_i où $i = 1, ..., r$, ce qui contredit que le nombre des hyperplans de F est infini.

On conclut que $\exists i \in [[1,r]]$ tel que $F_i = F$, donc F_i contient tous les F_k et la récurrence est établie.

Q25. Pour tout $x \in E$, $\pi_{f,x}$ divise π_f, donc $\{x \in E \ / \ \pi_{f,x} | \pi_f\}$ est fini, soit égale à $\{x_1, ..., x_r\}$, or $\forall x \in E$, $\pi_{f,x}(f)(x) = 0$, donc $E = \bigcup_{x \in E} Ker(\pi_{f,x}(f)) = \bigcup_{i=1}^{r} Ker(\pi_{f,x_i}(f))$ et par la question précédente, $\exists j \in [[1,r]]$ tel que $E = Ker(\pi_{f,x_j}(f))$ et par suite $\pi_{f,x_j}(f) = 0$, ce qui exige que π_f divise π_{f,x_j} c'est à dire $\pi_{f,x_j} = \pi_f$, donc $(x_j, f(x_j), ..., f^{d-1}(x_j))$ est une famille libre de E grâce à la minimalité du degré de π_{f,x_j}.

Q26. $deg(\pi_f) = d$ et unitaire, donc $f^d \in Vect(id_E, f, ..., f^{d-1})$, donc $f^d(x_1) \in Vect(x_1, f(x_1), ..., f^{d-1}(x_1))$ et par suite E_1 est stable par f.

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, la division euclidiènne de P par π_f donne l'existence de $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \pi_f Q + R$ où $deg(R) \leq d-1$, donc $P(f) = \pi_f(f) o Q(f) + R(f) = R(f) \in Vect(id_E, f, ..., f^{d-1})$ et par suite $P(f)(x_1) \in Vect(x_1, f(x_1), ..., f^{d-1}(x_1))$.

On conclut que $\{P(f)(x_1) \ / \ P \in \mathbb{K}[X]\} \subset E_1$, la réciproque est évidente.

Q27. ψ_1 est un endomorphisme de E_1 tel que $(x_1, \psi_1(x_1), ..., \psi_1^{d-1}(x_1))$ est une base de E_1, donc ψ_1 est cyclique.

Q28. • Soit $x \in F$, alors $\forall i \in \mathbb{N}$, $\Phi(f^i(x)) = 0$, donc $\Phi(f^{i+1}(x)) = \Phi(f^i(f(x)) = 0$, c'est à dire $f(x) \in F$, ce qui assure la stabilité de F.

• Soit $x = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i e_i \in E_1 \cap F$, alors pour tout $k \in [[0, d-1]]$, $0 = \Phi(f^k(x)) = \alpha_{d-k}$, donc $x = 0$, d'où E_1 et F sont en somme directe.

Q29. • La linéarité de Ψ vient de la linéarité de Φ et f.

• Soit $x = \sum_{k=1}^{d} \alpha_i e_i \in E_1$ tel que $\Psi(x) = (\Phi(x), ..., \Phi(f^{d-1}(x)) = (\alpha_d, \alpha_{d-1}, ..., \alpha_1) = (0, ..., 0)$, alors $x = 0$, donc $Ker(\Psi) \cap E_1 = \{0\}$ de plus $dim(E_1) = dim(\mathbb{K}^d)$, donc Ψ est un isomorphisme de E_1 dans $\mathbb{K}^d$.

Q30. Déjà $F \subset Ker(\Psi)$.

Réciproquement soit $x \in Ker(\Psi)$, alors $\Phi(x) = \Phi(f(x)) = ... = \Phi(f^{d-1}(x)) = 0$, or $deg(\pi_{f,x}) \leq deg(\pi_f) = d$, donc $\forall k \geq d$, $f^k(x) = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i f^i(x)$ et par suite $\Phi(f^k(x)) = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i \Phi(f^i(x)) = 0$, c'est à dire $x \in F$. On conclut que $F = Ker(\Psi)$ et par théorème du rang appliqué à Ψ, $dim(F) = dim(E) - dim(Im(\Psi)) = n - d$.

On conclut que d'après la question $Q28$, E_1 et F sont en somme directe et on vient de montrer que $dim(E_1) + dim(F) = dim(E)$, donc $E = E_1 \oplus F$.

Q31. • Soit $d = deg(\pi_f)$, on vient de montrer que $E = E_1 \oplus F$ où ψ_1 l'endomorphisme induit par f sur E_1 est cyclique de matrice dans la base $(x_1, f(x_1), ..., f^{d-1}(x_1))$ de E_1 est une matrice compagnon, avec $P_1 = \pi_f$.

• Si $F = \{0\}$, on a le résultat.

Si non, F étant stable par f, on refait le même raisonnement à l'endomorphisme induit par f sur F qu'on notera $f_{|F}$, on obtient $F = E_2 \oplus G$ où ψ_2 l'endomorphisme induit par f sur E_2 est cyclique, avec $P_2 = \pi_{f_{|F}} | \pi_f = P_1$.

• La finitude de la dimension de E exige que ce procédé est fini, ce qui donne le résultat.

III.C - Commutant d'un endomorphisme quelconque

Q32. Considérons l'ensemble $G = \{g \in \mathcal{C}(f) \ / \ \forall i \in [[1,r]]\ g(E_i) \subset E_i\}$.

On garde les notations de la question précédente et notons g_i l'endomorphisme de E_i induit par g. Alors $g \in \mathcal{C}(f) \iff \forall i \in [[1,r]]\ \psi_i o g_i = g_i o \psi_i \iff \forall i \in [[1,r]]\ g_i \in \mathcal{C}(\psi_i)$.

Or $dim(\mathcal{C}(\psi_i)) = deg(P_i) = d_i$, donc $dim(G) = \sum_{i=1}^{r} d_i^2 \geq \sum_{i=1}^{r} d_i = n$, or $G \subset \mathcal{C}(f)$, donc $dim(\mathcal{C}(f)) \geq dim(G) \geq n$.

Q33. $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$, donc $dim(\mathcal{C}(f)) = dim(\mathbb{K}[f]) = deg(\pi_f)$ et par la question précédente, $deg(\pi_f) \geq n$, et par suite $deg(\pi_f) = n$, ce qui entraine la cyclicité de f.

IV Endomorphismes orthocycliques

IV.A - Isométries vectorielles orthocycliques

Q34. • Posons $\chi_f = \chi_{f'} = (X-1)^p(X+1)^q \prod_{i=1}^{r}(X^2 - 2cos(\theta_i)X + 1)$ avec $p+q+2r = n$ et $p, q, r \in \mathbb{N}$.

• D'après le théorème de réduction des automorphismes orthogonaux, il existe $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E, tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = Mat_{\mathcal{B}'}(f) = diag(I_p, -I_q, R(\theta_1), ..., R(\theta_r))$ avec $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} cos(\theta_i) & -sin(\theta_i) \\ sin(\theta_i) & cos(\theta_i) \end{pmatrix}$

Q35. $\Longrightarrow$ supposons que f est orthocyclique, alors la matrice de f dans une base orthonormée est C_Q avec $Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$, donc C_Q est une matrice orthogonale.

Notons $C_1, ..., C_n$ les colonnes de C_Q, alors $\forall i \in [[1, n-1]]$, $0 = C_i^T C_n = a_i$ et $1 = C_n^T C_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2$, ce qui exige $a_0^2 = 1$, c'est à dire $a_0 = \pm 1$, donc $\chi_f = Q = X^n + a_0$.

$\Longleftarrow$ Soit $Q = X^n - \varepsilon$ où $\varepsilon = \pm 1$ et soit f' l'endomorphisme de matrice C_Q dans une base orthonormée, alors $f' \in O(E)$ et $\chi_f = \chi_{f'}$, donc d'après la question précédente, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est C_Q, ce qui entraine que f est orthocyclique.

IV B - Endomorphismes nilpotents orthocycliques

Q36. • f est nilpotent, donc il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure stricte T.

• Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de la base $\mathcal{B}' = (e_n, e_{n-1}, ..., e_1)$, alors P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}' = (\varepsilon_n, ..., \varepsilon_1)$ est triangulaire inférieure et on a $Mat_{\mathcal{C}'}(f) = P^{-1}Mat_{\mathcal{B}}(f)P$ est triangulaire inférieure comme produit de matrices triangulaires inférieures.

Q37. $\Longrightarrow$ Supposons que f est orthocyclique, alors f est nilpotent cyclique, donc d'après la question $Q12$, l'indice de nilpotence est n et par suite sa matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est C_{X^n}, donc $Ker(f) = Vect(e_n)$ et $(Ker(f))^\perp = Vect(e_1, ..., e_{n-1})$, et par suite $f((Ker(f))^\perp) = Vect(f(e_1), ..., f(e_{n-1})) = Vect(e_2, e_3, ..., e_n)$, or $(e_2, ..., e_n)$ est une famille orthonormée, donc $\forall x, y \in (Ker(f))^\perp \ \ (f(x)|f(y)) = (x|y)$.

$\Longleftarrow$ Supposons que f satisfait aux deux hypothèses $rg(f) = n-1$ et $\forall x, y \in (Ker(f))^\perp$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$.

• D'après la question précédente, la matrice de f est triangulaire inférieure stricte dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E, de la forme $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 \\ & T & & \vdots \\ & & & 0 \end{array}\right)$

où T triangulaire inférieure de $M_{n-1}(\mathbb{R})$ de rang $n-1$.

• $E = (Ker(f))^\perp \oplus Ker(f)$, donc $(e_1, ..., e_{n-1})$ est une base orthonormée de $(Ker(f))^\perp$ et $Ker(f) = Vect(e_n)$, donc $\forall i, j \in [[1, n-1]] \ \ (f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$ et par suite T est une matrice orthogonale de $O_{n-1}(\mathbb{R})$. (car ces colonnes forment une base orthonormée de $Vect(e_2, ..., e_n)$.)

• $Sp(T)$ est réel inclu dans $\{-1, 1\}$, et puisque T est orthogonale, la norme de chaque colonne est égale à 1, et par suite les composantes sont nulle sauf la seule composante qui est 1 ou -1, d'où $T = diag(-I_p, I_q)$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ et $p+q = n-1$.

• Si $p = 0$, alors $T = I_{n-1}$ et $M = C_{X^n}$.

Si $p \geq 1$, La matrice M est orthogonalement semblable à C_{X^n}, en effet $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p, e_{p+1} ..., e_q, e_n)$, alors la matrice de f dans la base orthonormée $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, -e_3, e_4, ..., (-1)^p e_p, (-1)^{p+1}e_{p+1}, ..., (-1)^{p+1}e_q, (-1)^{p+1}e_n)$ est C_{X^n}.

• On conclut que f est orthocyclique.