L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux, à traiter dans l'ordre souhaité.

EXERCICE

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ se notera I_p. Si $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}\,(M)$ sa trace, ${}^tM$ sa transposée et π_M son polynôme minimal.

$1^{\text{ère}}$ Partie
Réduction d'une matrice

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$, et soit n un entier naturel $\geqslant 2$. On pose $\beta = a - b$, $\gamma = a + (n-1)b$ et on note A, D les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \beta & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

1.1. Préciser le rang de la matrice $A - \beta I_n$.

1.2. En déduire que β est une valeur propre de la matrice A et que le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.

1.3. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPDP$.

1.4. Calculer le déterminant de la matrice A. À quelle condition, sur a et b, la matrice A est-elle inversible ?

1.5. Préciser le polynôme minimal de A puis donner l'expression de l'inverse de la matrice A, si elle est inversible, en fonction des matrices A et I_n.

1.6. On suppose de plus que les réels β et γ sont positifs ou nuls. Donner une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et ayant toutes ses valeurs propres positives ou nulles, telle que $A = S^2$.

$2^{\text{ème}}$ Partie
Application à l'étude d'une famille de vecteurs d'un espace euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$ muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$; la norme euclidienne sur E associée à ce produit scalaire est notée $\|.\|$.

2.1. On suppose qu'il existe une famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs **unitaires** de E et un réel α, non nul et distinct de 1, tels que, pour tout $i \neq j$, $(u_i|u_j) = \alpha$. On note G la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général $(u_i|u_j)$, pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n+1\}^2$.

2.1.1. Montrer que $\alpha \in [-1, 1[$. Si $(i,j) \in \{1, \dots, n+1\}^2$ et $i \neq j$, la famille (u_i, u_j) est-elle liée ?

2.1.2. Justifier que la famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$ est liée.

2.1.3. Montrer que les colonnes de G sont liées et en déduire que la matrice G n'est pas inversible.

2.1.4. En appliquant les résultats de la partie précédente à la matrice G, déterminer la valeur de α en fonction de n.

2.2. Étude de la réciproque

On pose $c = -\frac{1}{n}$ et on note M la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par : $M = \begin{pmatrix} 1 & c & \dots & c \\ c & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ c & \dots & c & 1 \end{pmatrix}$; on désigne par $<\ ,\ >$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.2.1. Montrer qu'il existe une matrice symétrique $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $M = B^2$.

Dans la suite, une telle matrice B est choisie et on pose $M = \big(m_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$, $B = \big(b_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$.

2.2.2. Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n+1\}^2$, exprimer $m_{i,j}$ en fonction des coefficients de la matrice B.

2.2.3. Moyennant le résultat de la question précédente, construire une famille $(w_1,\dots,w_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n+1\}^2$, $< w_i, w_j >= m_{i,j}$.

2.2.4. Montrer que la matrice M n'est pas inversible et en déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^{n+1}$, de dimension n et contenant tous les vecteurs $w_1,\dots,w_{n+1}$.

2.2.5. Montrer qu'il existe effectivement une famille $(v_1,\dots,v_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs **unitaires** de E tels que, pour tout $i \neq j$, $(v_i|v_j) = -\frac{1}{n}$.
On pourra construire une isométrie entre E et l'espace euclidien F, muni de la structure euclidienne induite par celle de $\big(\mathbb{R}^{n+1}, <\ ,\ >\big)$.

PROBLÈME

Dans ce problème, $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes, E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, non nécessairement de dimension finie, et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E.

Pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, on pose $g^0 = id_E$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, g^k désigne le composé de k endomorphismes égaux à g. Si $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme $u \circ v$ se notera simplement uv. Un endomorphisme de E de la forme $\lambda\, id_E$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$, est dit une *homothétie*.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{C}$; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se notera I_n. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *scalaire* si elle est de la forme $\lambda\, I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{C}[X]$ désigne l'algèbre des polynômes à coefficients complexes et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{C}_p[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ formé des polynômes de degré $\leq p$.

L'objet de ce problème est d'établir le résultat suivant dû à AUPETIT en 1988 : *Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe E pour lequel il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x), \dots, f^n(x))$ est liée, alors la famille $(id_E, f, \dots, f^n)$, d'éléments de $\mathcal{L}(E)$, est liée.*

1ère Partie
Un résultat utile sur les fractions rationnelles

On se donne une fraction rationnelle $\dfrac{R}{Q}$ où R et Q sont des polynômes, à coefficients complexes, premiers entre eux. On suppose que la fraction $\dfrac{R}{Q}$ est définie et bornée sur $\mathbb{C} \setminus D$, où D est un ensemble fini, c'est à dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus D$, $\dfrac{|R(z)|}{|Q(z)|} \leqslant M$.

3.1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|R(z)| \leqslant M|Q(z)|$.

3.2. Montrer que cette fraction n'a aucun pôle et qu'il s'agit en fait d'un polynôme qu'on notera P.

3.3. On pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où d est le degré de P.

3.3.1. Soit $(k,q)\in\mathbb{N}^2$; calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(k-q)t}\,\mathrm{d}t$ selon les valeurs de k et q.

3.3.2. Soient $q\in\{1,\dots,d\}$ et $r>0$; calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} P(re^{it})\,e^{-iqt}\,\mathrm{d}t$ et l'exprimer à l'aide de r et des coefficients du polynôme P.

3.3.3. Montrer alors que le polynôme $P=\frac{R}{Q}$ est constant.

2ème Partie
Étude du cas $n=1$ et applications

Soit f un endomorphisme de E.

4.1. Étude du cas $n=1$

Dans cette section on suppose que, pour tout vecteur $x\in E$, la famille $(x,f(x))$ est liée.

4.1.1. Démontrer que, pour tout $x\in E\setminus\{0_E\}$, il existe un unique $\lambda_x\in\mathbb{C}$ tel que $f(x)=\lambda_x\,x$.

4.1.2. Soit $(x,y)\in(E\setminus\{0\})^2$; démontrer que si la famille (x,y) est liée alors $\lambda_x=\lambda_y$.

4.1.3. Soit $(x,y)\in(E\setminus\{0\})^2$; démontrer que si la famille (x,y) est libre alors $\lambda_x=\lambda_y$.

4.1.4. En déduire alors que f est une homothétie ; en particulier, la famille (id_E,f) est liée.

4.2. Quelques applications

4.2.1. Montrer que si f laisse stables toutes les droites vectorielles de E, alors f est une homothétie.

4.2.2. Montrer que si E est de dimension finie ≥ 3 et si f laisse stables tous les plans vectoriels de E, alors f est une homothétie.

4.2.3. On suppose ici que f n'est pas une homothétie et que E est de dimension finie $p\geqslant 2$.

(i) Démontrer qu'il existe $x_0\in E$ tel que la famille $(x_0,f(x_0))$ soit libre.

(ii) Justifier l'existence d'une famille $(e_3,\dots,e_p)$ d'éléments de E telle que la famille $(x_0,f(x_0),e_3,\dots,e_p)$ soit une base de E.

(iii) On désigne par h la symétrie vectorielle de E par rapport au sous-espace vectoriel $\mathbb{C}.x_0$, engendré par x_0, parallèlement au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\{f(x_0),e_3,\dots,e_p\})$.

Comparer $h(f(x_0))$ et $f(h(x_0))$ puis en déduire que $hf\neq fh$.

4.2.4. On suppose encore que E est de dimension finie $p\geq 2$. Déduire de ce qui précède que si $fg=gf$ pour tout $g\in\mathcal{L}(E)$ alors f est une homothétie.

4.2.5. Traduction matricielle

Soit $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $p\geq 2$. Montrer que A est une matrice scalaire si, et seulement si, $AM=MA$ pour tout $M\in\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

3ème Partie
Étude du cas général

On se donne ici un endomorphisme f de E pour lequel il existe un entier $n\geqslant 2$ tel que, pour tout $e\in E$, la famille $(e,f(e),\dots,f^n(e))$ est liée.

5.1. Soit $x\in E\setminus\{0_E\}$.

5.1.1. Montrer qu'il existe un unique $n_x\in\{1,\dots,n\}$ tel que la famille $\big(x,f(x),\dots,f^{n_x-1}(x)\big)$ soit libre et la famille $\big(x,f(x),\dots,f^{n_x}(x)\big)$ soit liée.

5.1.2. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\Big(x,f(x),\dots,f^{n_x-1}(x)\Big)$ est stable par f.

5.2. On pose $p=\max\{n_x\ ;x\in E\setminus\{0_E\}\}$.

5.2.1. Justifier que p est bien défini, que $p\leqslant n$ et qu'il existe $x_0\in E\setminus\{0_E\}$ tel que la famille $\big(x_0,f(x_0),\dots,f^{p-1}(x_0)\big)$ soit libre et la famille $\big(x_0,f(x_0),\dots,f^{p}(x_0)\big)$ soit liée.

5.2.2. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P\in\mathbb{C}[X]$, de degré p, tel que $P(f)(x_0)=0_E$ et justifier que $Q(f)(x_0)\neq 0_E$, pour tout polynôme non nul de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$.

Dans la suite, un tel couple (p, x_0) est choisi.

On va établir que $P(f) = 0$ et par suite, la famille $(id_E, f, \dots, f^p)$ est liée, donc à fortiori la famille $(id_E, f, \dots, f^n)$ l'est aussi puisque $p \leqslant n$.

Pour cela, on considère $e \in E \setminus \{0_E\}$ et on cherche à montrer que $P(f)(e) = 0_E$.

5.3. On pose $F = \mathrm{Vect}\Big(x_0, f(x_0), \dots, f^p(x_0), e, f(e), \dots, f^p(e)\Big)$ et, pour tout complexe λ, $v_\lambda = x_0 + \lambda\, e$.

5.3.1. Montrer que le sous-espace vectoriel F est stable par f.

5.3.2. Montrer que le sous-espace vectoriel F est de dimension finie comprise entre p et $2p$.

5.3.3. Montrer qu'il existe une famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_{p-1})$ de formes linéaires sur F telle que, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{0, \dots, p-1\}$, $\varphi_j(f^i(x_0)) = \delta_{i,j}$.

Dans la suite, on note $\Delta(\lambda)$ le déterminant de la matrice $\Big(\varphi_j\big(f^i(v_\lambda)\big)\Big)_{0\leqslant i,j\leqslant p-1} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

5.4. Montrer que $\Delta(\lambda)$ est un polynôme en λ, de degré $\leqslant p$ et que $\Delta(0) = 1$.

5.5. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe une famille $\big(\alpha_0(\lambda), \dots, \alpha_{p-1}(\lambda)\big)$ de complexes tels que

$$f^p(v_\lambda) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(\lambda) f^k(v_\lambda). \tag{1}$$

5.6. On dispose ainsi des p application $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}$ qui sont des fonctions complexes de la variable complexe.

5.6.1. Justifier que, pour tout complexe λ, les scalaires $\alpha_0(\lambda), \dots, \alpha_{p-1}(\lambda)$ vérifient le système d'équations linéaires :

$$\varphi_j\big(f^p(v_\lambda)\big) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(\lambda)\varphi_j\big(f^k(v_\lambda)\big), \quad 0 \leqslant j \leqslant p-1. \tag{2}$$

5.6.2. On note Z l'ensemble des racines complexes du polynôme Δ. Déduire de ce qui précède que les restrictions à $\mathbb{C} \setminus Z$ des fonctions $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}$ sont des fractions rationnelles.

5.7. On considère le polynôme $P_\lambda = X^p - \sum\limits_{k=0}^{p-1} \alpha_k(\lambda) X^k$ et on note $\beta_0(\lambda), \dots, \beta_{p-1}(\lambda)$ ses racines dans $\mathbb{C}$, chacune d'elles étant répétée autant de fois que son ordre de multiplicité. On a donc $P_\lambda = \prod\limits_{k=0}^{p-1}\Big(X - \beta_k(\lambda)\Big)$.

5.7.1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Z$, la famille $\big(v_\lambda, f(v_\lambda), \dots, f^{p-1}(v_\lambda)\big)$ est libre.

5.7.2. En déduire que, pour tout $j \in \{0, \dots, p-1\}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Z$,

$$\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{p-1} \Big(f - \beta_k(\lambda)\, id_E\Big)(v_\lambda) \neq 0_E.$$

5.7.3. Montrer alors que, pour tout $j \in \{0, \dots, p-1\}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Z$, $\beta_j(\lambda)$ est une valeur propre de f_F, endomorphisme de F induit par f.

5.8. On note $\|.\|$ une norme quelconque sur F et, pour tout $g \in \mathcal{L}(F)$, on pose $\|g\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|g(x)\|$.

5.8.1. Montrer que $g \mapsto \|g\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(F)$.

5.8.2. Montrer que, pour tout couple (g, h) d'éléments de $\mathcal{L}(F)$, $\|gh\| \leq \|g\|\|h\|$.

5.8.3. Montrer que, pour tout $j \in \{0, \dots, p-1\}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Z$, $|\beta_j(\lambda)| \leqslant \|f_F\|$.

5.8.4. En utilisant les formules de Viète, donnant les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme, et dont on demande ici des précisions, montrer que les restrictions à $\mathbb{C} \setminus Z$ des fonctions $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}$ sont bornées.

5.9. Conclure que les fractions rationnelles $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}$ sont constantes et en déduire que $P_\lambda = P$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, puis justifier que $P(f)(e) = 0_E$. *On pourra utiliser le résultat de la première partie.*

Fin de l'épreuve