EXERCICE

1ère Partie
Réduction d'une matrice

1.1. • $A-\beta I_n=\begin{pmatrix} b & b & \dots & b \\ b & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & b \end{pmatrix}$, b étant non nul, donc $rang(A-\beta I_n)=1$.

1.2. • Par le théorème du rang $dimKer(A-\beta I_n)=n-1\geq 1$, donc $\beta\in Sp(A)$ et $dim(E_\beta(A))=n-1$.

1.3. • A étant symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, A est orthogonalement diagonalisable.
• Soit λ l'autre valeur propre de A, alors $\lambda=Tr(A)-(n-1)\beta=na-(n-1)(a-b)=a+(n-1)b=\gamma$, donc $\exists P\in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A={}^tPDP$ où $D=diag(\beta,...,\beta,\gamma)$.

1.4. • $det(A)=det(D)=\beta^{n-1}\gamma$.
• A est inversible si et seulement si, $\beta\gamma\neq 0$ si et seulement si, $(b-a)(a+(n-1)b)\neq 0$.

1.5. • A étant diagonalisable, donc le polynôme minimal de A est scindé à racines simples, c'est à dire $\Pi_A=(X-\beta)(X-\gamma)$.
• Π_A est annulateur de A, donc $\Pi_A(A)=A^2-(\beta+\gamma)A+\beta\gamma I_n=A(A-(\beta+\gamma)I_n)+\beta\gamma I_n=0$, ce qui entraine que A est inversible et que $A^{-1}=-\dfrac{1}{\beta\gamma}(A-(\beta+\gamma)I_n)$.

1.6. • En posant $\Delta=diag(\sqrt{\beta},...,\sqrt{\beta},\sqrt{\gamma})$ et $S={}^tP\Delta P$, on aura $S^2=A$ et $S\in S_n(\mathbb{R})$.

2 ème Partie
Application à l'étude d'une famille de vecteurs d'un espace euclidien

2.1. **2.1.1.** • L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|\alpha|\leq\|u_i\|.\|u_j\|=1$, or $\alpha\notin\{0,1\}$, donc $\alpha\in[0,1[\backslash\{0\}$.
• (u_i,u_j) liée si et seulement si, $|\alpha|=1$ si et seulement si, $\alpha=-1$.
Donc si (u_i,u_j) est liée, on doit avoir $u_j=-u_i$, mais si $k\notin\{i,j\}$, $(u_i|u_k)=(u_j|u_k)=-1$, donc $u_k=-u_i=-u_j$,ce qui aboutit à la contradiction $u_i=u_j$. On conclut que si $i\neq j$ (u_i,u_j) ne peut être liée.

2.1.2. • La famille $(u_1,...,u_{n+1})$ est de cardinal $>n=dim(E)$, donc elle est liée.

2.1.3. • La liaison de la famille $(u_1,...,u_{n+1})$ entraine l'existence de $\alpha_1,...,\alpha_{n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k u_k=0$, donc $\forall i\in[[1,n+1]]$ $0=(u_i|\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k u_k)=\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k(u_i|u_k)$.

Si on note C_k la k ème colonne de G, alors $\forall i\in[[1,n]]$, $(\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k C_k)_i=\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k(u_i|u_k)=0$, donc $\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k C_k=0$ c'est à dire $(C_1,...,C_{n+1})$ est liée.

• Si on pose $U={}^t(\alpha_1,...,\alpha_{n+1})$, alors $U\neq 0$ et l'égalité précédente s'écrit $GU=0$, donc $Ker(G)\neq\{0\}$ et par suite G n'est pas inversible.

2.1.4. • $G=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & \dots & \alpha & 1 \end{pmatrix}$

G n'est pas inversible, donc d'après la question 1.4 de la partie précédente $\alpha=1$ ou $1+n\alpha=0$, la première condition étant exclue, ce qui donne $\alpha=-\dfrac{1}{n}$.

2.2. **Étude de la réciproque**

2.2.1. • On ait dans les conditions de la partie 1, avec $a=1$ et $b=-\dfrac{1}{n}$, donc $\beta=a-b=1+\dfrac{1}{n}$ et $\gamma=a+nb=1-1=0$ sont positifs, ce qui permet d'appliquer la question 1.6 de la partie 1 qui assure l'existence de $B\in S_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2=M$.

2.2.2. • L'égalité $M = B^2$ est équivalente à $\forall i, j \in \{1, ..., n+1\}$, $m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} b_{i,k} b_{k,j}$.

2.2.3. • B est symétrique, donc $m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} b_{i,k} b_{j,k} =< w_i | w_j >$ avec $w_i = {}^t(b_{i,1}, ..., b_{i,n+1})$, en particulier $1 = m_{i,i} = \|w_i\|^2$, donc w_i est unitaire.

2.2.4. • $\gamma = 0$ est une valeur propre de M, donc M n'est pas inversible.

• Si on pose A la matrice de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ de colonnes $w_1, ..., w_{n+1}$, alors $M = {}^tAA$, donc $0 = det(M) = det^2(A)$, donc A n'est pas inversible et par suite la famille $(w_1, ..., w_{n+1})$ est liée, ce qui entraine que $dimVect(w_1, ..., w_{n+1}) \leq n$ d'où l'existence d'un sous-espace F de dimension n contenant ces vecteurs.

On peut même remarquer, puisque la somme des colonnes de M est nulle, que $\|\sum_{i=1}^{n+1} w_i\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n+1} < w_i | w_j >= \sum_{1 \leq i,j \leq n+1} m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n+1} (\sum_{j=1}^{n+1} m_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n+1} 0 = 0$, donc $\sum_{i=1}^{n+1} w_i = 0$ et vu que le rang de B est gale à n, on aura $(w_1, ..., w_n)$ base de F.

2.2.5. • Considérons f une isométrie de $F = Vect(w_1, ..., w_n)$ vers E donc f conserve le produit scalaire.(Une telle isométrie existe, il suffit de choisir une base orthonormée de E pour le produit scalaire $(.|.)$ et une base orthonormée de F pour le produit scalaire $< .|. >$ et considérer l'application linéaire qui transforme la base de F en la base de E).

Alors si on pose $v_i = f(w_i)$ pour tous $i \in \{1, ..., n+1\}$, alors $\forall i \neq j \in \{1, ..., n\}$, $(v_i | v_j) =< w_i | w_j >= -\frac{1}{n}$ et $(v_i | v_i) =< w_i | w_i >= 1$, de plus $\forall i \in \{1, ..., n\}$,

• $(v_{n+1} | v_i) = (f(w_{n+1}) | f(w_i)) = (f(-\sum_{j=1}^{n} w_j) | f(w_i)) = -\sum_{j=1}^{n} < w_j | w_i >= -1 + \frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n}$

• $(v_{n+1} | v_{n+1}) = (f(w_{n+1}) | f(w_{n+1})) = (-\sum_{i=1}^{n} f(w_i) | -\sum_{j=1}^{n} f(w_j)) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} < w_i | w_j >=$

$= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} < w_i | w_j >) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$

La famille $(v_1, ..., v_{n+1})$ répond à la question.

PROBLÈME

1 ère Partie
Un résultat utile sur les fractions rationnelles

3.1. • L'inégalité est évidement vérifiée sur $\mathbb{C} \setminus D$.

• Soit $a \in D$ qui est fini, donc z_0 est isolé, et par suite $\exists r > 0$ tel que $B(a, r)$ ne rencontre D qu'au point a et soit une suite $(z_n)_n$ de $B(a, r) \setminus \{z_0\}$ qui converge vers a, alors la passage à la limite dans l'inégalité $|R(z_n)| \leq M|Q(z_n)|$ et grâce à la continuité des applications $z \longmapsto |R(z)|$ et $z \longmapsto M|Q(z)|$, entraine que $|R(a)| \leq M|Q(a)|$.

En définitive, l'inégalité est vérifiée pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3.2. • Si $Q(z_0) = 0$, alors l'inégalité précédente, entraine que $R(z_0) = 0$, ce qui contredit que $R \wedge Q = 1$.

• Q est sans pôles dans $\mathbb{C}$, donc Q est constant, et par suite la fraction $\frac{R}{Q}$ devient un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$.

3.3. **3.3.1.** • $\int_0^{2\pi} e^{i(k-q)t} dt = 2\pi \delta_{k,q}$ où $\delta_{k,q}$ désigne le symbôle de Kroneker.

3.3.2. • $P = \sum_{k=1}^{d} a_k X^k$, donc $\int_0^{2\pi} P(re^{it}) e^{-iqt} dt = \sum_{k=1}^{d} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-q)t} dt = \sum_{k=1}^{d} a_k r^k \delta_{k,q} = 2\pi a_q r^q$.

3.3.3. • Soit $r > 0$, $q \in \{1, ..., d\}$, alors $2\pi |a_q| r^q = |\int_0^{2\pi} P(re^{it} e^{-iqt} dt| \leq 2\pi M$, donc $|a_q| \leq \frac{M}{r^q}$, ce qui entraine en tendant r vers $+\infty$ que $a_q = 0$ pour tout $q \in \{1, ..., d\}$ et par suite $P = a_0$.

2 ème Partie
Étude du cas $n = 1$ et applications

4.1. Étude du cas $n = 1$

4.1.1. • $x \neq 0$ et $(x, f(x))$ liée, donc $\exists \lambda_x \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$, c'est à dire λ_x valeur propre associée à x, d'où l'unicité.

4.1.2 • x vecteur propre associé à λ_x et (x, y) liée, donc y est aussi vecteur propre associé à λ_x, d'où $f(y) = \lambda_x y = \lambda_y y$ et puisque $y \neq 0$, on obtient $\lambda_x = \lambda_y$.

4.1.3. • D'une part $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$ et d'autre part $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ et par liberté de (x, y), on aura $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

4.1.4. • On vient de montrer que $\forall x, y \in E \backslash \{0\}$, $\lambda_x = \lambda_y$, c'est à dire $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in E \backslash \{0\}, f(x) = \lambda x$, donc $f = \lambda id_E$.

4.2. Quelques applications

4.2.1. • f laisse stable les droites vectorielles, donc $\forall x \in E \setminus \{0\}$ $f(x) \in Vect(x)$, donc daprès 4.1 f est une homothétie.

4.2.2. • Soit x, y, z trois vecteurs librent deux à deux de E, alors $Vect(x, y) \cap Vect(x, z) = Vect(x)$ est stable par f, donc f laisse stable toutes les droites vectorielles, et la question précédente entraine que f est une homothétie.

4.2.3. **(i)** f n'est pas une homothétie, donc par contraposée de la question 4.1, $\exists x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $(x_0, f(x_0))$ est libre.

(ii) Le théorème de la base incomplète assure l'existence des vecteurs $e_3, ..., e_p$ tel que $(x_0, f(x_0), e_3, ..., e_p)$ soit une base de E.

(iii) $h(f(x_0)) = -f(x_0)$ et $f(h(x_0)) = f(x_0)$, or $f(x_0) \neq 0$, donc $h(f(x_0)) \neq f(h(x_0))$ et par suite $fh \neq hf$.

4.2.4. • Si f n'est pas une homothétie, la conclusion de la question $4.2.3$ conduit à l'existence de h symétrie vectorielle de E tel que $fh \neq hf$, donc par contraposée on obtient l'implication demandée.

4.2.5. **Traduction matricielle**

• $\Longrightarrow$ Si $A = \lambda I_p$ est une matrice scalaire, alors elle commute avec toutes les matrices.

• $\Longleftarrow$ Si A commute avec toutes les matrices, considérons f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $AM = MA$, donc $fg = gf$ c'est à dire f commute avec tous les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, et par la question $4.2.4$, f est une homothétie, donc A est une matrice scalaire.

3 ème Partie
Étude du cas général

5.1. **5.1.1.** • L'ensemble $L = \{q \in [[1, n]] \ / \ (x, f(x), ..., f^q(x))$ est liée$\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui contient n, donc admet un plus petit élément n_x.

$n_x \in L$ et $n_x - 1 \notin L$, donc $(x, f(x), ..., f^{n_x}(x))$ est liée et $(x, f(x), ..., f^{n_x - 1}(x))$ est libre.

5.1.2. • $f(Vect(x, f(x), ..., f^{n_x - 1})) \subset Vect(f(x), ..., f^{n_x}(x))$, or d'après la question précédente $f^{n_x}(x) \in Vect(x, f(x), ..., f^{n_x - 1}(x))$, donc $Vect(x, f(x), ..., f^{n_x - 1}(x))$ est stable par f.

5.2. **5.2.1.** • La question précédente assure que l'ensemble $\{n_x \ / \ x \in E \setminus \{0\}\}$ est non vide inclu dans $[[1, n]]$, donc p existe et $p \leq n$ et $p = n_{x_0}$ où $x_0 \in E \setminus \{0\}$, donc $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre et $(x_0, f(x_0), ..., f^p(x_0))$ est liée.

5.2.2. • Par définition de p, $f^p(x_0) \in Vect(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$, donc $\exists a_0, a_1, ..., a_{p-1}$ tel que

$f^p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^i(x_0) = P(x_0)$ avec $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$.

• L'unicité vient de la liberté de la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$.

• De plus s'il existe $Q \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ non nul tel que $Q(f)(x_0) = 0$, alors la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est liée, ce qui est absurde.

5.3. **5.3.1.** • $f^p(x_0) \in Vect(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ et $p \geq n_e$, donc $f^p(e) \in Vect(e, f(e), ..., f^{p-1}(e))$, ce qui assure la stabilité de F par f.

5.3.2. • La famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre de cardinal p, donc $dim(F) \geq p$.

• $f^p(x_0) \in Vect(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ et $f^p(e) \in Vect(e, f(e), ..., f^{p-1}(e))$, donc $F = Vect(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0), e, f(e), ..., f^{p-1}(e))$, et par suite $dim(F) \leq 2p$.

5.3.3. • La famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre dans F, on la complète en une base de F.

Une forme linéaire sur F est totalement détérminée par ses images sur une base de F. On considère pour $j \in \{1, ..., p-1\}$ la forme linéaire φ_j sur F qui prend 1 sur $f^j(x_0)$ et nulle sur les autres vecteurs de la base, alors $(\varphi_0, ..., \varphi_{p-1})$ répond à la question.

5.4. • Pour $i, j \in \{1, ..., p-1\}$, $\varphi_j(f^i(v_\lambda)) = \delta_{i,j} + \lambda\varphi_j(f^i(e))$.

Si on note $M(v_\lambda)$ la matrice $(\varphi_j(f^i(v_\lambda)))_{1 \leq i,j \leq p-1}$, alors $M(v_\lambda) = I_p + \lambda M(e)$,donc $\Delta(\lambda) = det(M_{v_\lambda})$ est un polynôme en λ de degré $\leq p$.

• $\Delta(0) = det(I_p) = 1$.

5.5. • Par définition de p, $p \geq n_{v_\lambda}$, donc $f^p(v_\lambda) \in Vect(v_\lambda, f(v_\lambda), ..., f^{p-1}(v_\lambda))$, ce qui assure l'existence de la famille $\alpha_0(\lambda), ..., \alpha_{p-1}(\lambda)$ tel que $f^p(v_\lambda) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(\lambda) f^k(v_\lambda)$.

5.6. **5.6.1.** • La linéarité de φ_j donne le système (2).

5.6.2. • Le système (2) s'écrit $M_{v_\lambda} \begin{pmatrix} \alpha_0(\lambda) \\ \vdots \\ \alpha_{p-1}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0(f^p(v_\lambda)) \\ \vdots \\ \varphi_{p-1}(f^p(v_\lambda)) \end{pmatrix}$

$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus Z$, $\Delta(\lambda) = det(M(v_\lambda)) \neq 0$, donc le système admet une solution unique, à savoir $\alpha_i(\lambda) = \dfrac{1}{\Delta(\lambda)} det(A)$ où A est la matrice $M(v_\lambda)$ en remplaçant la ième colonne par le second membre du système (2). On a donc α_i est une fraction rationnelle en λ définie sur $\mathbb{C} \setminus Z$.

5.7. **5.7.1.** • Soit $a_0, ..., a_{p-1} \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^i(v_\lambda) = 0$, alors

$$\forall j \in \{0, ..., p-1\}, \quad 0 = \varphi_j(\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^i(v_\lambda)) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \varphi_j(f^i(v_\lambda)) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \delta_{i,j} = a_j,$$

donc la famille $(v_\lambda, f(v_\lambda), ..., f^{p-1}(v_\lambda))$ est libre.

5.7.2. • Soit pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Z$ et $j \in \{0, ..., p-1\}$, $Q_j = \prod_{\substack{k=i \\ k \neq j}}^{p-1} (X - \beta_k(\lambda))$.

Q_j est de degré $p-1$ et la famille $(v_\lambda, f(v_\lambda), ..., f^{p-1}(v_\lambda))$ est libre, donc $Q_j(f)(v_\lambda) \neq 0$.

5.7.3. • L'égalité (1) de la question 5.5, s'écrit $0 = P_\lambda(f)(v_\lambda) = (f - \beta_j(\lambda) id_E)(Q_j(f)(v_\lambda))$, donc $Q_j(f)(v_\lambda) \in Ker(f - \beta_j(\lambda) id_E)$ et $Q_j(f)(v_\lambda) \neq 0$, donc $\beta_j(\lambda) \in Sp(f)$.

5.8. **5.8.1.** • Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|g\| = 0$, alors $g = 0$ sur la sphère $S(0,1)$, donc $\forall x \in F \setminus \{0\}$, $\dfrac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$, et par suite $g(\dfrac{x}{\|x\|}) = \dfrac{1}{\|x\|} g(x) = 0$, donc $g = 0$ sur $F \setminus \{0\}$ et $g(0) = 0$, on conclut que $g = 0$ sur F.

• $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\|\lambda g\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda g(x)\| = |\lambda| \|g\|$.

• $\forall x \in S(0,1), \forall g, h \in \mathcal{L}(F)$ $\|g(x) + h(x)\| \leq \|g(x)\| + \|h(x)\| \leq \|g\| + \|h\|$ et par passage au sup, on obtient $\|g + h\| \leq \|g\| + \|h\|$.

5.8.2. • Soit $x \in F \setminus \{0\}, \forall g \in \mathcal{L}(F)$ $\|g(x)\| = \|g(\dfrac{x}{\|x\|})\|.\|x\| \leq \|g\|.\|x\|$,

donc $\forall x \in F \setminus \{0\}$, $\|(gh)(x) = g(h(x))\| \leq \|g\|.\|h(x)\| \leq \|g\|.\|h\|.\|x\|$ et par suite $\|gh(\dfrac{x}{\|x\|})\| \leq \|g\|.\|h\|$ et le passage au sup entraine que $\|gh\| \leq \|g\|.\|h\|$.

5.8.3. • Soit x un vecteur propre unitaire de f_F associé à $\beta_j(\lambda)$, alors $\|\beta_j(\lambda) x\| = |\beta_j(\lambda)| = \|f_F(x)\| \leq \|f_F\|$.

5.8.4. • Les formules de Viète s'écrivent $\forall k \in \{1, ..., p\}$, $\alpha_{p-k} = (-1)^{k-1} \sum_{0 \leq i_1 < ... < i_k \leq p-1} \beta_{i_1} ... \beta_{i_k}$.

• $|\alpha_{p-k}| \leq \sum_{0 \leq i_1 < ... < i_k \leq p-1} |\beta_{i_1}| ... |\beta_{i_k}| \leq \sum_{0 \leq i_1 < ... < i_k \leq p-1} \|f_F\|^k = C_p^k \|f_F\|^k \leq M = \max_{1 \leq k \leq p} (C_p^k \|f_F\|^k)$.

5.9. • Les α_i sont des fractions rationnelles bornées sur $\mathbb{C} \setminus Z$ où Z est fini, donc d'après la première partie, ces fractions sont constantes, donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall k \in \{0, ..., p-1\}$, $\alpha_k(\lambda) = \alpha_k(0)$ et par suite $P_\lambda = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(0) X^k$, or $v_0 = x_0$ et l'égalité (1) de la question 5.5, avec $\lambda = 0$ s'écrit $P_\lambda(f)(x_0) = P_0(f)(x_0) = 0$.

• P_λ est unitaire de degré p tel que $P_\lambda(f)(x_0) = 0$, or l'unicité d'un tel polynôme assurée par la question $5.2.2$ entraine que $P_\lambda = P$.

• Avec $\lambda = 1$, $P_\lambda(f)(e) = P_\lambda(f)(v_\lambda - x_0) = P_\lambda(f)(v_\lambda) - P_\lambda(f)(x_0) = 0 - 0 = 0$.