
CCP - Maths 2

Proposition de corrigé

Taoufiki said

Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

Q1. $((X_0 = 1), (X_0 = 2))$ est un système complet d'événements , par " probabilités totales " :

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1/X_0 = 1)P(X_0 = 1) + P(X_1 = 1/X_0 = 2)P(X_0 = 2) = \frac{3}{8}$$

Et $\qquad P(X_1 = 2) = 1 - P(X_1 = 1) = \frac{5}{8}$.
Autrement dit

$$X_1 - 1 \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{5}{8})$$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_{n+1} = 1/X_n = 1)P(X_n = 1)+P(X_{n+1} = 1/X_n = 2)P(X_n = 2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}).{}^t\mu_n$$

$$P(X_{n+1} = 2) = P(X_{n+1} = 2/X_n = 1)P(X_n = 1)+P(X_{n+1} = 2/X_n = 2)P(X_n = 2) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}).{}^t\mu_n$$

d'où $\qquad {}^t\mu_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.{}^t\mu_n$ puis $\qquad \mu_{n+1} = \mu_n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Q3. Par la question **Q3.** , on a : $\qquad \mu_5 = \mu_0 A^5$. On trouve que :

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0,333984375 & 0,666015625 \\ 0,3330078125 & 0,6669921875 \end{pmatrix}$$

On demande d'arrondir au centièmes donc $\quad \mu_5 = (0,33; 0,67)$.

Q4. • On a : $\quad P(T = 1) = P(X_1 = 1, X_0 = 2) = P(X_1 = 1/X_0 = 2)P(X_0 = 2) = \frac{1}{8}$.

•• On a : $\quad P(T = k) = P(X_k = 1, \bigcap_{i=0}^{k-1}(X_i = 2))$.

La formule de probabilités composées permet d'écrire :

$$P(T = k) = P(X_k = 1/\bigcap_{i=0}^{k-1}(X_i = 2))P(X_{k-1} = 2/\bigcap_{i=0}^{k-2}(X_i = 2))...P(X_1 = 2/X_0 = 2)P(X_0 = 2)$$

Puisque l'état de la particule dépend uniquement de son état au temps qui précède , alors :

$$P(T = k) = P(X_k = 1/X_{k-1} = 2)P(X_{k-1} = 2/X_{k-2} = 2)...P(X_1 = 2/X_0 = 2)P(X_0 = 2) = \frac{3^{k-1}}{2^{2k+1}}$$

Q5. • $\quad$ Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$\chi_A(X) = X^2 - tr(A)X + \det(A) = X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{1}{4} = (X - 1)(X - \frac{1}{4})$$

il est sindé à racines simples donc A est diagonalisable .
•• Les sous espaces propres :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A) \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\frac{1}{4}}(A) \quad \Leftrightarrow \quad x = -2y$$

donc $E_1(A) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{\frac{1}{4}}(A) = vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
On pose : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, son inverse est $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$.

Q6. Les composantes des applications $M \mapsto QMQ^{-1}$ et $M \mapsto \mu_0 M$ sont des fonctions polynomiales à plusieurs variables (qui sont les coefficients de M) donc ces applications sont continues.

Q7. Posons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ A^n = QD^nQ^{-1} \quad , \quad \mu_n = \mu_0 A^n$$

Comme $\|D^n - E_{1,1}\|_\infty = \frac{1}{4^n} \to 0$ avec $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\lim D^n = E_{1,1}$

le passage à la limite dans les égalités précédentes et la continuité des applications $M \mapsto QMQ^{-1}$ et $M \mapsto \mu_0 M$ sur $M_2(\mathbb{R})$ permettent d'écrire :

$$\lim A^n = QE_{1,1}Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \lim \mu_n = \mu_0 \lim A^n = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

Q8. $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice stochastique donc pour $i = 1, ..., p$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1$

si $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ alors u non nul et $Au = u$ d'où $1 \in sp(A)$.

Q9. Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $k \in \{1, ..., p\}$ tels que $\|x\|_\infty = |x_k|$. On a :

$$Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{p,j}x_j \end{pmatrix}$$

donc $\forall i = 1, ..., p \ , \ |\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j| \leq \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}||x_j| \ \leq |x_k| \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = |x_k| = \|x\|_\infty$

d'où $\quad \|Ax\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq p} |\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j| \leq \|x\|_\infty.$

Q10. Soient $\lambda \in sp(A)$ et $x \in \mathbb{C}^p$ tels que $x \neq 0$ et $Ax = \lambda x$.
Par **Q9.** , on a $|\lambda|\|x\|_\infty = \|\lambda x\|_\infty = \|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$
en simplifiant par $\|x\|_\infty \neq 0$, on obtient : $|\lambda| \leq 1$.
Q11. Si $u \in \mathbb{C}^p$ tel que $u \neq 0$ et $Au = \lambda u$ alors Le vecteur $x = \frac{1}{\|u\|_\infty} u$ convient.
Q12. On a : $|x_i| = \|x\|_\infty = 1$.
La $i^{\text{ème}}$ ligne du système linéaire $Ax = \lambda x$ s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j = \lambda x_i$$

donc $(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$, par suite :

$|\lambda - a_{i,i}| = |(\lambda - a_{i,i})x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j| \leq \sum_{j \neq i} a_{i,j} = 1 - a_{i,i}$ car $a_{i,1}, ..., a_{i,p} \geq 0$ et leur somme vaut 1

Q13. Soit $\lambda \in sp(A)$. La matrice A est bien stochastique donc il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ vérifiant :

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}$$

d'où $\quad sp(A) \subseteq \overline{D}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap \overline{D}(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}) \cup \overline{D}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ où $\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \ , \ |z - a| \leq r\}$.

Q14. Si on refait la démonstration de **Q12.** , en supposant qu'il existe $x \in \mathbb{C}^p$ non nul et qu'il existe $i \in \{1, ..., p\}$ tels que :

$$B'x = \lambda x \quad \text{et} \quad |x_i| = 1$$

comme $B' = (a_{k,j} - \delta_{k,j})_{1 \leq k,j \leq p-1}$, alors :

$$|\lambda - (a_{i,i} - 1)| = |\lambda - (a_{i,i} - \delta_{i,i})| \leq \sum_{\substack{j = 1 \\ j \neq i}}^{p-1} |a_{i,j} - \delta_{i,j}| = \sum_{\substack{j = 1 \\ j \neq i}}^{p-1} a_{i,j} = 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$$

Bien sûr , cette démonstration n'est pas demandée.
Supposons que B' n'est pas inversible donc $0 \in sp(B')$
Pour $\lambda = 0$, il existe $i \in \{1, ..., p-1\}$ vérifiant : $1 - a_{i,i} = |\lambda - (1 - a_{i,i})| \leq 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$
donc $a_{i,p} \leq 0$ ce qui est absurde.
Q15. On extrait de $A - I_p$ une matrice de taille $p-1$ qui est inversible donc $rg(A) \geq p-1$
puis $dim\ Ker(A - I_p) \leq 1$.
D'autre part , $1 \in sp(A)$ donc $dim\ Ker(A - I_p) \geq 1$, d'où le résultat cherché.

Partie III - Itérées d'une matrice stochastique

Q16. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $s(x, y) = (y, x)$.
En particulier $s(1, 0) = (0, 1)$ et $s(0, 1) = (1, 0)$. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^{2n} = I_2$ et $B^{2n+1} = B$. Les deux suites extraites admettant deux limites différentes donc la suite $(B^n)_n$ diverge dans $M_2(\mathbb{R})$.
La **proposition 2** tombe en défaut si la matrice stochastique n'est pas strictement positive.

Q18. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ une valeur propre de N et x un vecteur propre associé à α.
Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $N^k = 0$ donc $\alpha^k.x = N^k.x = 0$, d'où $\alpha = 0$.
La seule valeur propre possible est 0 donc le polynôme caractéristique s'écrit $\chi_N(X) = X^p$.
Ce polynôme annule la matrice par théorème de Cayley-Hamilton , d'où $N^p = 0$.

Q19 • On a

$$\frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{\frac{n^k}{k!}} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} \to 1 \quad \text{(fraction de deux polynômes unitaires de même degré)}$$

D'où l'équivalence cherchée.

•• On a : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \lambda^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!} \lambda^{n-k} \longrightarrow 0$ (par comparison de croissances).
Q20. Une matrice scalaire permute avec toute matrice , donc la formule de Binôme s'applique

$$(\lambda I_p + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \lambda^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{p-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \lambda^{n-k} N^k \qquad \text{car} \quad N^p = 0$$

les scalaires de cette somme finie sont tous des termes de limite nulle , d'où le résultat.
Q21. Il existe $Q \in GL_p(\mathbb{C})$ telle que :

$$Q^{-1}AQ = diag(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, ..., \lambda_1 I_{p_r} + N_r)$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q^{-1}A^nQ = diag(1, (\lambda_1 I_{p_1} + N_1)^n, ..., (\lambda_r I_{p_r} + N_r)^n)$.
Puisque les matrices $N_1, ..., N_r$ sont nilptentes alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda_i I_{p_i} + N_i)^n = O_{M_{p_i}(\mathbb{C})}$ pour chaque

$i=1,...,r$. d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} Q^{-1}AQ = diag(1,0,...,0)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = Qdiag(1,0,...,0)Q^{-1}$ par continuité de l'application $M \mapsto QMQ^{-1}$.

Partie IV - Probablité invariante par une matrice stochastique

Q22. Notons cet ensemble par F et considérons les applications continues (polynomiales) :

$$f : (x_1,...,x_p) \mapsto x_1 + ... + x_p \quad \text{et} \quad p_i : (x_1,...,x_p) \mapsto x_i \ , \ i=1,...,p$$

On sait que l'image réciproque d'un fermé par une application continue est fermé , que l'intersection de fermés l'est aussi et que $\{1\}$ et $\mathbb{R}^+$ sont des fermés de $\mathbb{R}$ donc $F = \bigcap_{i=1}^{p} p_i^{-1}(\mathbb{R}^+) \bigcap f^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$.

Q23. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \mu_0 A^n$
la suite (A^n) converge (**proposition 2** : stochastique et $A > 0$) et l'application $M \mapsto \mu_0 M$ est continue donc (μ_n) converge vers $\mu_\infty = \mu_0 \lim A^n$.
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_{n+1} = \mu_n A$ et $\mu \mapsto \mu A$ est continue (composantes polynomiales) alors par passage à la limite , on trouve $\mu_\infty = \mu_\infty A$.

Q24. On a : $\mu A = (m_1,...,m_p)(a_{i,j})_{1\le i,j\le p} = (\sum\limits_{i=1}^{p} m_i a_{i,1}, ..., \sum\limits_{i=1}^{p} m_i a_{i,p})$.
Les composantes de μA sont positives car A et μ sont positifs , leur somme est :

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} m_i a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p} m_i \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p} m_i = 1$$

On vient de montrer que : $\mu \in F \quad \Rightarrow \quad \mu A \in F$.

Q25. • On a : $\mu_0 \in F$ (par hypothèse) et si $\mu_n \in F$ alors $\mu_{n+1} = \mu_n A \in F$ (par **Q24.**) donc $\mu_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa limite μ_∞ appartient à l'adhérence de F qui est exactement F (par **Q22.**).
on en déduit que μ_∞ est une probabilité invariante (car c'est un vecteur stochastique qui vérifie $\mu = \mu A$).

Q26. μ est un vecteur non nul (car les composantes sont ≥ 0 , de somme 1). On a :

$$\begin{aligned} \mu \text{ est une probabilité invariante pour } A &\Leftrightarrow \quad \mu A = \mu \\ &\Leftrightarrow \quad {}^t\mu = {}^t A.{}^t\mu \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \in sp({}^tA) \text{ associée à } {}^t\mu \end{aligned}$$

Q27. On a : $dim\ Ker({}^tA - I_p) = dim\ Ker[{}^t(A - I_p)] = p - rg\ [{}^t(A - I_p)] = p - rg\ (A - I_p)$
comme $p = rg\ (A - I_p) + dim\ Ker(A - I_p) = rg\ (A - I_p) + 1$ (Formule du rang et **Q15.**)
alors $dim\ Ker({}^tA - I_p) = 1$.

Q28. Supposons que μ_1, μ_2 sont des probablités invariantes par A.
On a : ${}^t\mu_1$, ${}^t\mu_2 \in Ker({}^tA - I_p)$ qui est une droite vectorielle

il existe $\alpha > 0$ vérifiant : ${}^t\mu_1 = \alpha.{}^t\mu_2$ ($\alpha > 0$ car ${}^t\mu_1$, ${}^t\mu_2$ sont positifs et non nuls)
le fait qu'ils sont stochastiques entraîne que $\alpha = 1$, d'où l'égalité.

Partie V - Informatique : calcul effectif de la probablité invariante d'une matrice stochastique strictement positive

Q29. $len(A) = 4$, $A[1] = [4, 5, 6]$, $A[2][1] = 8$.
Q30.
```
def difference(x,y)
n=len(x)
D=[ ]
for i in range(n)
D.append(x[i]-y[i])
return D
```
Q31.
```
def norme(x)
n=len(x)
N=abs(x[0])
for i in range(1,n)
if N<abs(x[i])
N=abs(x[i])
return N
```
Q32.
```
def itere(x,A)
n=len(x)
IT=[ ]
for i in range(n)
c=sum(x[k]A[k][i] for k in range(n)
IT=IT.append(c)
return IT
```
Q33.
```
def probaInvariante(A,eps)
n=len(A)
u=[1/n for i in range(n)]
v=itere(u,A)
w=difference(u,v)
while abs(w)>eps
u=liste(v)
v=itere(u,A)
w=difference(u,v)
return v
```

Pour vos remarques , merci de me contacter sur
"taoufiki-maths@hotmail.fr"