
CCP - Maths 1

Proposition de corrigé

Taoufiki said

EXERCICE 1

Q1. f est la composée d'une focntion polynomiale et de la fonction sinus donc elle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. g l'est aussi car ses composantes sont polynomiales. En particulier les deux fonctions sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$.
Pour les matrices Jacobiennes :

$$Jac\ f(x,y) = 2\cos(x^2-y^2)(x,-y) \quad , \quad Jac\ g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Q2. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
1. On a : $f \circ g(x,y) = f(x+y, x-y) = \sin(4xy)$ donc

$$d(f\circ g)(x,y).(u,v) = \frac{\partial f\circ g}{\partial x}(x,y).u + \frac{\partial f\circ g}{\partial y}(x,y).v = 4\cos(4xy)(uy+vx)$$

2. On a : $Jac\ (f\circ g)(x,y) = Jac\ f(a,b).Jac\ g(x,y)$ où $(a,b) = g(x,y)$
donc $Jac\ (f\circ g)(x,y) = 4\cos(4xy)(y,x)$ puis

$$d(f\circ g)(x,y).(u,v) = Jac\ (f\circ g)(x,y).\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 4\cos(4xy)(uy+vx)$$

Q3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{q\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2q^2}$ converge de somme $\frac{\pi}{6p^2}$

et la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{p^2q^2}$ est convergente de somme $\frac{\pi^2}{36}$

alors la famille $(\frac{1}{p^2q^2})_{(p,q)\in A}$ est sommable de somme $\frac{\pi^2}{36}$.

Q4. Pour tout $(p,q) \in A$, $0 \leq \frac{1}{(p+q)^2} \leq \frac{1}{p^2+q^2}$, il suffit de montrer la non-sommabilité de la famille $(\frac{1}{(p+q)^2})_{(p,q)\in A}$:
Considérons la partition suivante de A : $J_n = \{(p,q) \in A \ / \ p+q = n\}$, $n \geq 2$.
Pour tout $n \geq 2$, $card(J_n) = n-1$ donc $\displaystyle\sum_{(p,q)\in J_n} \frac{1}{(p+q)^2} = \frac{n-1}{n^2}$

La divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n-1}{n^2}$ entraîne la non-sommabilité de la famille $(\frac{1}{(p+q)^2})_{(p,q)\in A}$, d'où le résultat cherché.

PROBLÈME

Partie I - Exemples

Q5. • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
comme $\sum \dfrac{1}{2^n}$ est convergente alors notre série trigonométrique est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
•• La série géométrique $\sum \left(\dfrac{e^{ix}}{p}\right)^n$ est convergente car $|\frac{e^{ix}}{p}| = \frac{1}{p} < 1$, sa somme est $\frac{p}{p-e^{ix}}$
••• On a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} = Re(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n) = Re(\frac{2}{2-e^{ix}}) = \frac{4-2\cos x}{5-4\cos x}$
et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n} = Im(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{3}\right)^n) = Im(\frac{3}{3-e^{ix}}) = \frac{3\sin x}{10-6\cos x}$
d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\cos nx}{2^n} + \frac{\sin nx}{3^n}\right] = \frac{4-2\cos x}{5-4\cos x} + \frac{3\sin x}{10-6\cos x}$.

Q 6. On rappelle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(e^{ix}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$
Par la formule de Moivre , on a
$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(ix)$. Puisque les deux séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(nx)}{n!}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(nx)}{n!}$ sont absolument convergente (car $\left|\frac{\cos(nx)}{n!}\right| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left|\frac{\cos(nx)}{n!}\right| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$)
alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(e^{ix}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$
D'autre part : $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos x)\exp(i\sin x) = \exp(\cos x)(\cos(\sin x) + i\sin(\sin x)$
Par identification , $\exp(\cos x)\cos(\sin x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$.

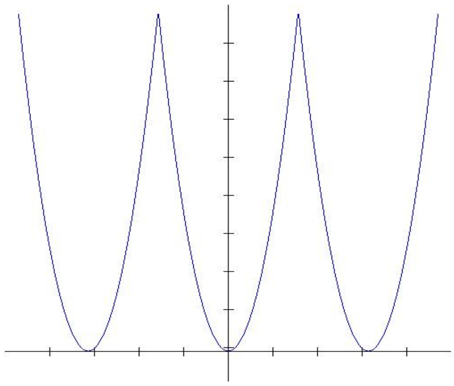
Q7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{1}{n+1}$. La suite (a_n) converge vers 0 et la série $\sum a_n \cos nx$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ (pour $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la somme est infinie).

Q8. Posons $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.
On a : $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = |f_n(\frac{\pi}{2n})| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge alors la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Propriétés

Q9. La série $\sum(|a_n|+|b_n|)$ converge car $\sum a_n$, $\sum b_n$ sont absolument convergentes et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n\cos(nx)+\sin(nx)b_n|\le|a_n|+|b_n|$
donc la série $\sum(a_n\cos(nx)+\sin(nx)b_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Q10. Posons $f(x)=a\cos x+b\sin x$. Si $a=b=0$ le résultat est trivial
sinon , on prend $z=a+ib=re^{i\theta}$. On a : $f(x)=Re(ze^{ix})=Re(re^{i(x+\theta)})=r\cos(x+\theta)$
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|\le r=|f(-\theta)|$ donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|=r=\sqrt{a^2+b^2}$.
Q11. De la même manière , on obtient $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$
La convergence normale de la série trigonométrique est équivaut à la convergence de la série numérique $\sum\sqrt{a_n^2+b_n^2}$
Comme $\forall n$, $|a_n|\le\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ et $|b_n|\le\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ alors les deux Séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ convergent absolument puis les termes généraux ont la limite nulle.
Q12. Pour tout n , $f_n : x\mapsto a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ car (converge normalement) donc sa somme est continue sur $\mathbb{R}$.
Aussi $f(x+2\pi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x+2\pi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)=f(x)$, d'où $f\in C_{2\pi}$.
Q13. Pour $n\in\mathbb{N}^*$. On a :
$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(2nx)+1}{2}dx=\left[\frac{\sin(2nx)}{4n}+\frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi.$
Pour $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n\neq k$. On a :
$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin((k+n)x)+\sin(k-n)x}{2}dx=\left[\frac{-\cos((k+n)x)}{2(k+n)}+\frac{-\cos((k-n)x)}{2(k-n)}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$
Q14. On pose : $f_k(x)=a_k\cos kx+b_k\sin kx$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a : $\alpha_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k(x)\cos(nx)dx$
comme $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $|f_k(x)\cos nx|\le\|f_k\|_\infty$ et $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc $\sum f_k(x)\cos nx$ converge normalement puis uniformément sur $[-\pi,\pi]$, ce qui permet l'intervertion série-intégrale , soit $\alpha_n(f)=\frac{1}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f_k(x)\cos(nx)dx$
pour $k\neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi}f_k(x)\cos(nx)dx=a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)dx=0$
et $\int_{-\pi}^{\pi}f_n(x)\cos(nx)dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(nx)dx=\pi$ (car **Q13.** et $x\mapsto\sin(nx)\cos(nx)$ est impaire) , d'où $\alpha_n(f)=a_n$.
$\alpha_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f_k(x)dx$ (Convergence uniforme de $\sum f_k$ sur $[-\pi,\pi]$)
Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)dx=0$ (La fonction est impaire)
et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)dx=0$ (pour $k=0$ la valeur est 2π)
donc $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\int_{-\pi}^{\pi}f_k(x)dx=0$ et $\int_{-\pi}^{\pi}f_0(x)dx=2\pi a_0$ d'où $\alpha_0(f)=2a_0$.
Q15 On pose $a_0=\frac{\alpha_0(f)}{2}$, $b_0=0$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\alpha_n(f)$, $b_n=\beta_n(f)$
par hypothèse , la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, de somme g
par **Q14.** , $\alpha_0(g)=2a_0=\alpha_0(f)$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_n(g)=a_n=\alpha_n(f)$ et $\beta_n(g)=b_n=\beta_n(f)$.
Q16. D'après **Q12.** $g\in C_{2\pi}$, on pose : $h=f-g\in C_{2\pi}$ (car c'est un espace vectoriel).
Par linéarité de l'intégrale et **Q15.** , on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n(h)=\alpha_n(f)-\alpha_n(g)=0=\beta_n(f)-\beta_n(g)=\beta_n(h)$

Le résultat admis permet de conclure que : $f - g = h = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Q17 La fonction $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire , son intégrale sur un intervalle centré sera nulle donc $\beta_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La fonction $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire , donc $\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^0 f(x)\cos(nx)dx$
puis $\alpha_n(f) = 2\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Q18



La fonction f est paire donc $\beta_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2dx = \frac{2\pi^2}{3}$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ (Intégration par parties deux fois).
On pose : $u_0(x) = \frac{2\pi^2}{3}$ et pour $n \neq 0$, $u_n(x) = \frac{4(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$.
on a : $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n(x)| \leq \frac{4}{n^2}$) , de somme f (voir le résumé après **Q16**) .
Q19 • On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \dfrac{2\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$.

Comme $f(0) = 0$ alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

Et $f(\pi) = \pi^2$ entraîne $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

•• On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+2} = T_n + \frac{1}{4}S_{n+1}$, le passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ nous donne :
$\pi^2 6 = \lim T_n + \pi^2 12$ (les T_n sont les sommes partielles d'une série convergente)

d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Q20. On pose : $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc sa restriction sur $]0,1[$ y est intégrable.
En utilisant le développement en série entière de $x \mapsto \ln(x+1)$, on écrit :

$$\forall x \in]0,1] \quad , \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$$

Posons , pour $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{(-x)^{n-1}}{n}$. On a $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement vers f cette convergence est normale puis uniforme , en effet

$$\forall x \in]0,1] \quad , \quad |f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \qquad \text{(T.S.S.A)}$$

(ceci reste vrai pour $x = 0$: $|R_n(0)| = 0 \leq \frac{1}{n+1}$)
donc $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x} = \int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Q21. • La fonction f définie en **Q18.** est la somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable aux points $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
•• Posons $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$.
Si $\sum u_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ alors la somme sera dérivable (Dérivation terme à terme).
Supposons que les deux séries numériques $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ sont absolument convergentes , alors

$$|u_n'(x)| = |-na_n \sin nx + nb_n \cos nx| \leq |na_n| + |nb_n|$$

ce qui assure la convergence normale de $\sum u_n'$ sur $\mathbb{R}$ puis la dérivabilité de la somme.

Q22. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n} = \frac{3 \sin x}{10 - 6 \cos x}$ (voir **Q5.**) .
La condition proposée en **Q21.** est vérifiée : $\sum \frac{n}{3^n}$ est convergente (règle de D'Alembert)
La somme f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nx}{3^n}$
d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nx}{3^n} = \frac{30 \cos x - 18}{(10 - 6 \cos x)^2}$$

Pour vos remarques , merci de me contacter sur "taoufiki-maths@hotmail.fr"