محمد اقلمون

CNM Maths 1

Localisation des racines d'un polynôme et Unimodularité des racines

Corrigé

Exercice 1.

1. $(1-\sqrt{xy})^2-(1-x)(1-y)=x+y-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$.

2. La fonction F étant continue sur $[0,1]^2\setminus\{(1,1)\}$.
Vérification de la continuité en $(1,1)$, d'après l'inégalité précédente, pour tout $(x,y)\in[0,1]$ distinct de $(1,1)$ on a $|F(x,y)|\leq \dfrac{xy(1-\sqrt{xy})^2}{(1-xy)}\leq \dfrac{xy(1-\sqrt{xy})}{1+\sqrt{xy}}$; mais $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy(1-\sqrt{xy})}{1+\sqrt{xy}}=0$; donc F est continue en $(1,1)$.

3. F étant continue sur le compact $[0,1]^2$, donc elle est bornée et elle atteint ses bornes.

4. Pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$, $F(x,y)\geq 0=F(1,1)$, donc 0 est la borne inférieure de F sur $[0,1]^2$, et on a de plus ;
F atteint sa borne inférieure en un point $(x,y)\in[0,1]^2$ si, et seulement si, $(x,y)=(1,1)$ ou $xy(1-x)(1-y)=0$ si, et seulement si, $(x,y)\in\{0,1\}\times[0,1]\cup[0,1]\times\{0,1\}$.
La borne inférieure est atteint en tout point de $\partial([0,1]^2)$ frontière de $[0,1]^2$.
Remarque : la fonction F est non constante et nul sur la frontière de $[0,1]$, donc la borne supérieure est atteint à l'intérieure de $[0,1]^2$.

5. F de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[^2$, puisque c'est le quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[^2$ avec $(x,y)\mapsto 1-xy$ ne s'annule pas sur $]0,1[^2$.
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{(1-2x+x^2y)(1-y)y}{(1-xy)^2}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\frac{(1-2y+xy^2)(1-x)x}{(1-xy)^2}$$

6. Un point $(x_0,y_0)\in]0,1[^2$ est un point critique de F si, et seulement si, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ si, et seulement si, $x_0=y_0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

7. $F(x_0,y_0)=\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}>0$.
D'après la le résultat de la question 4. et sa remarque, F atteint sa borne supérieure à l'intérieure de $[0,1]^2$ c'est-à-dire dans $]0,1[^2$, qui est un point critique ; mais F admet un unique point critique dans $]0,1[^2$; donc F atteint sa borne supérieure en (x_0,y_0) ; c'est-à-dire $F(x_0,y_0)=\sup\limits_{(x,y)\in[0,1]^2} F(x,y)$.

PROBLÈME

Première partie : Résultats préliminaires

1\. 1.1 $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, dont le rayon de convergence est égal à 1.

1.2 Si $|\beta|<1$, alors on a aussi $\left|\dfrac{\beta}{e^{it}}\right|<1$; d'après le résultat de la question précédente ; la série $\sum(\beta e^{-it})^m$ converge et on a $\sum_{m=0}^{+\infty}(\beta e^{-it})^m=\dfrac{1}{1-\beta e^{-it}}=\dfrac{e^{it}}{e^{it}-\beta}$, d'où le résultat.

1.3 Si $|\beta|>1$, alors $|\dfrac{e^{it}}{\beta}|<1$, et à l'aide de la première question on a
$\dfrac{e^{it}}{e^{it}-\beta}=-\dfrac{e^{it}}{\beta}\dfrac{1}{1-\frac{e^{it}}{\beta}}=-\dfrac{e^{it}}{\beta}\sum_{m=0}^{+\infty}(\dfrac{e^{it}}{\beta})^m=-\dfrac{e^{it}}{\beta}\sum_{m=0}^{+\infty}\beta^{-m}e^{imt}$.

1.4 Pour tout $t\in[0,2\pi]$; on a $f(\gamma(t))\gamma'(t)=i\dfrac{e^{it}}{e^{it}-\beta}$.

Si $|\beta|<1$: d'après le résultat de la question 1.2 on a $f(\gamma(t))\gamma'(t)=i\sum_{m=0}^{+\infty}\beta^m e^{-imt}$; d'autre part , pour tout $t\in[0,2\pi]$; $|\beta^m e^{-imt}|\leq|\beta|^m$, puisque la série $\sum|\beta|^m$ converge ($|\beta|<1$), on a donc la convergence normale donc uniforme, de la série de fonctions $\sum\beta^m e^{-imt}$, ce qui permet d'intervertir la somme et l'intégrale ; et on a donc ; $\int_\gamma f(z)dz=i\sum_{m=0}^{+\infty}\beta^m\int_0^{2\pi}e^{-imt}dt$;
de plus, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ on a $\int_0^{2\pi}e^{-imt}=0$, dans la somme il y a un seul terme qui n'est pas nul, le terme correspondant à $m=0$, et on a donc $\int_\gamma f(z)dz=i\int_0^{2\pi}dt=2i\pi$.

Si $|\beta|>1$: d'après le résultat de la question 1.3 on a $f(\gamma(t))\gamma'(t)=-i\frac{e^{it}}{\beta}\sum_{m=0}^{+\infty}\beta^{-m}e^{imt}$,par un raisonnement analogue, on a la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions $\sum_{m=0}^{+\infty}\beta^{-m}e^{imt}$ car $|\beta^{-1}|<1$; et c'est bien que $\int_\gamma f(z)dz=-\dfrac{i}{\beta}\sum_{m=0}^{+\infty}\beta^{-m}\int_0^{2\pi}e^{i(m+1)t}dt=$ 0 car pour tout $m\in\mathbb{N}$, on a $m+1\in\mathbb{N}^*$ et donc $\int_0^{2\pi}e^{i(m+1)t}dt=0$.

1.5 Un résultat de convexité :
$|\lambda v+\mu w|\leq\lambda|v|+\mu|w|=\lambda+\mu=1$, en effet l'inégalité est strict, car si $|\lambda v+\mu w|=1$, alors $\lambda^2|v|^2+\mu^2|w|^2+2\lambda\mu\mathrm{Re}(v\overline{w})=1=(\lambda+\mu)^2=\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu$,en tenant compte $|v|=|w|$ et λ et μ sont non nuls, on obtient $\mathrm{Re}(v\overline{w})=1=|v\overline{w}|$ ainsi $\mathrm{Im}(v\overline{w})=0$, ce qui montre que $v\overline{w}=1$, c'est-à-dire $v=w$ qui est une contradiction ($v\neq w$).

Deuxième partie : Deux résultats de localisation des racine d'un polynôme

2\. 2.1 Par une dérivation du produit on a $P'(X)=a\sum_{k=1}^{r}\left(\alpha_k(X-z_k)^{\alpha_k-1}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{r}(X-z_j)^{\alpha_j}\right)$, donc

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{r}\left(\alpha_k \frac{(X-z_k)^{\alpha_k-1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{r}(X-z_j)^{\alpha_j}}{\prod_{j=1}^{r}(X-z_j)^{\alpha_j}}\right) = \sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k}{X-z_k}.$$

Ainsi pour tout $z\in\mathbb{C}\backslash\{z_1,\dots,z_r\}$; $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k}{z-z_k}$.

2.2 $P'(w)=0$ et $P(w)\neq 0$.

2.2.1 $0=\dfrac{P'(w)}{P(w)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k}{w-z_k} = \sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k(\overline{z_k}-\overline{w})}{|w-z_k|^2}$, en passant au conjugué de ce nombre complexe et tenant compte $\alpha_k\in\mathbb{R}$, on obtient le résultat.

2.2.2 D'après le résultat de la question précédente on a ; $w\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k}{|w-z_k|^2} = \sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k}{|w-z_k|^2}z_k$, on a donc $w=\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\beta_k z_k$ où l'on a posé $\beta_k = \dfrac{\alpha_k}{|w-z_k|^2\displaystyle\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j}{|w-z_j|^2}}>0$, et c'est bien que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\beta_k = 1$.

2.3 Soit w une racine de P'.
Si w n'est pas une racine de P, d'après le résultat de 2.2.2, w est barycentre à coefficients (strictement) positifs, des racines de P.

Si w est une racine de P, alors il existe $j\in[\![1,k]\!]$ tel que $w=z_j$, et dans ce cas $w=\displaystyle\sum_{k=1}^{k}\beta_k z_k$ où $\beta_j=1$ et $\beta_k=0$ si $k\neq j$.

2.3.1 $\{z_1,\dots,z_r\}$ est une partie finie de $\mathbb{C}$, donc fermée, ainsi son complémentaire $\mathbb{C}\backslash\{z_1,\dots,z_r\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. $z\mapsto\dfrac{p'(z)}{P(z)}$ est une fonction fraction rationnelle avec P ne s'annule sur $\mathbb{C}\backslash\{z_1,\dots,z_r\}$, donc continue sur cet ouvert.

2.3.2 D'après le résultat de la question 2.1, on a $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k}{z-z_k}$, et notons que le nombre de racines de P dont le module est strictement inférieur à 1, compté de leur ordre de multiplicité est égal à $\displaystyle\sum_{|z_k|<1}\alpha_k$, autrement dit on doit démontrer que $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{|z_k|<1}\alpha_k$. En effet ;

$$\int_\gamma\frac{P'(z)}{P(z)}dz = \sum_{k=1}^{r}\int_\gamma\frac{\alpha_k}{z-z_k}dz = \sum_{|z_k|<1}\int_\gamma\frac{\alpha_k}{z-z_k}dz + \sum_{|z_k|>1}\int_\gamma\frac{\alpha_k}{z-z_k}dz = 2i\pi\sum_{|z_k|<1}\alpha_k.$$

Au passage on a utilisé le résultat de la question 1.4.

Troisième partie :
Une condition suffisante d'unimodularité des zéros d'un polynôme auto-inverse

3. 3.1 $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}a_kX^k$ avec $a_k=k-n$; on a donc $\overline{a_{2n-k}}=2n-k-n=n-k=-a_k$, donc S_n est auto-inverse de paramètre $\varepsilon=-1$.

3.2

3.2.1 Notons que $a_d\neq 0$; et $a_d=\varepsilon\overline{a_0}=\varepsilon\overline{(\varepsilon\overline{a_d})}=|\varepsilon|^2a_d$, donc $|\varepsilon|=1$.
$f(0)=a_0=\varepsilon\overline{a_d}\neq 0$.

3.2.2 On a $z^d\overline{P}(\frac{1}{z})=\sum\limits_{k=0}^{d}\overline{a_k}z^{d-k}=\sum\limits_{k=0}^{d}\overline{a_{d-k}}z^k$, donc $P(z)=\varepsilon\overline{P}(\frac{1}{z})$, $z\in\mathbb{C}^*$ si, et seulement si, $\forall k\in[\![0,d]\!]$, $a_k=\varepsilon\overline{a_{d-k}}$ si, et seulement si, P est auto-inverse.

3.3 Remarquons d'abord que , pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\overline{P}(z)=\overline{P(\overline{z})}$.
Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a $\overline{P+Q}(z)=\overline{(P+Q)(\overline{z})}=\overline{P(\overline{z})}+\overline{Q(\overline{z})}=\overline{P}(z)+\overline{Q}(z)$, donc $\overline{P+Q}=\overline{P}+\overline{P}$.
De même $\overline{PQ}(z)=\overline{(PQ)(\overline{z})}=\overline{P(\overline{z})Q(\overline{z})}=\overline{P(\overline{z})}\ \overline{Q(\overline{z})}=\overline{P}(z)\overline{Q}(z)$, donc $\overline{PQ}=\overline{P}\,\overline{Q}$.

3.4

3.4.1 On pose $Q=(X-1)P$, on a $\overline{Q}=(X-1)\overline{P}$, et pour tout $z\in\mathbb{C}^*$; on a $-\varepsilon z^{d+1}\overline{Q}(\frac{1}{z})=-(1-z)\varepsilon z^d\overline{P}(\frac{1}{z})=(z-1)P(z)=Q(z)$, donc Q est auto-inverse de paramètre $-\varepsilon$ où ε est le paramètre de P.

3.4.2 On pose $P_\mu=\sum\limits_{k=0}^{d}a_k\mu^kX^k=\sum\limits_{k=0}^{d}b_kX^k$, où $b_k=a_k\mu^k$. on a donc $\overline{b_{d-k}}=\overline{\mu^{d-k}}\overline{a_{d-k}}=\dfrac{1}{\varepsilon\mu^d}\mu^ka_k=\dfrac{1}{\varepsilon\mu^d}b_k$,c'est-à-dire $b_k=\varepsilon\mu^d\overline{a_{d-k}}$, ainsi P_μ est auto-inverse de paramètre $\varepsilon\mu^d$.

3.4.3 Soit $z_1,\dots,z_d$ les racines de P et on suppose que $|z_k|=1$, pour $k\in[\![1,d]\!]$, on a $\frac{1}{z_k}=\overline{z_k}$.
Le polynôme P s'écrit $P=a\prod\limits_{k=1}^{d}(X-z_k)$, où a est le coefficient dominant de P, et on a aussi $\overline{P}=\overline{a}\prod\limits_{k=1}^{d}(X-\overline{z_k})$, pour tout $z\in\mathbb{C}^*$ on a

$$z^d\overline{P}(\tfrac{1}{z})=\overline{a}\prod_{k=1}^{d}(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_k})=\overline{a}\prod_{k=1}^{d}(1-\frac{z}{z_k})=\frac{\overline{a}}{\prod_{k=1}^{d}z_k}\prod_{k=1}^{d}(z_k-z)=\frac{(-1)^d\overline{a}}{a\prod_{k=1}^{d}z_k}P(z)$$ ce qui montre que le polynôme P est auto-inverse de paramètre $\dfrac{(-1)^da}{\overline{a}}\prod_{k=1}^{d}z_k$.

3.4.4 $P=X^2-3X+1$ est auto-inverse, et les racines sont $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ de module $\neq 1$.

3.5 $\deg(X^{d-n}Q)=d>n\geq\deg(\varepsilon X^nQ(\dfrac{1}{X}))$, donc R est de degré d.
Pour $z\in\mathbb{C}^*$, on a $\overline{R}(1/z)=(1/z)^{d-n}\overline{Q}(1/z)+\overline{\varepsilon}(1/z)^nQ(z)$, donc $\varepsilon z^d\overline{R}(1/z)=\varepsilon z^n\overline{Q}(1/z)+|\varepsilon|^2z^{d-n}Q(z)=R(z)$, donc R est auto-inverse.

3.6

3.6.1 Pour $z\in\mathbb{U}$ on a ;
$|Q_2(z)|=|\varepsilon z^n||\overline{Q}(1/z)|=|\overline{Q}(\overline{z})|=|\overline{Q(z)}|=|Q(z)|=|z^{d-n}Q(z)|=|Q_1(z)|$.

3.6.2 Supposons qu'il existe $\lambda\in[0,1[$ et $u\in\mathbb{U}$ tel que $Q_1(u)+\lambda Q_2(u)=0$, on obtient $Q_1(u)=-\lambda Q_2(u)$, donc $|Q_1(u)|=\lambda|Q_2(u)|$, et puisque $\lambda\neq 1$ et $|Q_1(u)|=|Q_2(u)|$, alors $Q_1(u)=Q_2(u)=0$, en particulier $Q(u)=0$ c'est-à-dire u racine de Q de module 1, on a donc une contradiction.

3.6.3 Soit $a\in]0,1[$, la fonction $(t,\lambda)\mapsto i\dfrac{R'_\lambda(e^{it})}{R_\lambda(e^{it})}e^{it}$ continue sur le compact $[0,2\pi]\times[0,a]$, donc elle est bornée sur ce compact, on a donc la continuité de cette application sur $[0,a]$ par le théorème de continuité sous le signe intégral (la fonction dominante est ici constante, donc intégrable sur $[0,2\pi]$), et donc continue aussi sur $[0,1[=\bigcup\limits_{0<a<1}[0,a]$.
Par la question 2.4.2 cette fonction est à valeurs entières.

3.6.4 On rappelle le résultat suivant : *tout application continue sur un intervalle I est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est constante.*
En particulier, l'application précédente est constante.

3.6.5 D'après le résultat de la question précédente, pour tout $\lambda \in [0,1[$ on a :
$\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{R_\lambda'(z)}{R_\lambda(z)}dz = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{R_0'(z)}{R_0(z)}dz = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{Q_1'(z)}{Q_1(z)}dz = m$, où m est le nombre de racines de Q_1 de module < 1 comptées avec leur ordre de multiplicité, mais les racines de Q_1 sont ceux de Q et 0, donc toutes les racines de Q_1 sont de modules < 1, ceci montre que $m = \deg(Q_1) = d$,. Ainsi $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{R_\lambda(z)}{R_\lambda(z)} = d$, il vient alors que le nombre des racines du polynôme R_λ de module < 1 comptées avec leur ordre de multiplicité est égal à d, comme R_λ est de degré d (R_λ possède d racines avec ordre de multiplicité), on a alors le résultat.

3.7

3.7.1 Il n'y a qu'une seule affaire ! d'avoir une même extraction des composantes ? TOGO :
Pour $m \in \mathbb{N}$, posons $x_m = 1 - \dfrac{1}{m+1} < 1$, et on a $R_{x_m} = a\displaystyle\prod_{k=1}^{d}(z - z_{k,x_m})$, notons aussi $y_m = (z_{1,x_m},\dots,z_{d,x_m}) \in \mathbb{C}^d$, comme les composantes de la suite de terme y_m sont bornées, alors $(y_m)_m$ est une suite bornée de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^d$ de dimension finie, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il possède une suite extraite $(y_{\varphi(m)})_m$ convergente et notons $(z_1,\dots,z_d)$ sa limite, on a donc, pour tout $k \in [\![1,d]\!]$ la suite $(z_{k,x_{\varphi(m)}})_m$ converge vers z_k, il suffit de poser $\lambda_m = x_{\varphi(m)} \longrightarrow 1$ et $\lambda_m \in [0,1[$.
Pour tous $k \in [\![1,d]\!]$, $m \in \mathbb{N}$, on a $|z_{k,\lambda_m}| < 1$, en passant à la limite quand m tend vers $+\infty$ on obtient $|z_k| \le 1$.

3.7.2 On se place ici dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{C}_d[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension finie.
Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $R_{\lambda_m} = a_d\prod_{k=1}^{d}(X - z_{k,\lambda_m})$, il reste à faire tendre m vers $+\infty$ pour conclure. ($X - z_{k,\lambda_m} \longrightarrow X - z_k$ et la continuité du produit).

3.7.3 On a $R = X^{d-n}Q(X) + \varepsilon X^d\overline{Q}(1/X)$, on obtient $\overline{\varepsilon}X^dR(1/X) = X^{d-n}\overline{Q}(X) + \overline{\varepsilon}X^nQ(1/X) = X^{d-n}Q_1(X) + \overline{\varepsilon}X^n\overline{Q_1}(1/X)$ où l'on posé $Q_1 = \overline{Q}$, on a ainsi une représentation de du polynôme $S = \overline{\varepsilon}X^dR(1/X)$ de la forme (2) , comme les racines de Q_1 sont les conjuguées des racines de Q, alors ils sont toutes de module strictement inférieur à 1, d'après ce qui précède, les racines du polynôme $S = \overline{\varepsilon}X^dR(1/X)$, sont toutes de module ≤ 1.
Soit z une racine de R, alors $1/z$ est une racine de S, ainsi $|1/z| \le 1$, on a donc $|z| \ge 1$.
On en déduit alors que les racines de R, sont toutes de module 1.

Quatrième partie : Quelques applications

4.

4.1 Étude des racines de S_n

4.1.1 z racine de A_n si, et seulement si, $z \ne 1$ et $\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1} = 0$ si, et seulement si, $z \ne 1$ et $z^{n+1} = 1$ si, et seulement si, $z \in \mathbb{U}_{n+1}\setminus\{1\} \subset \mathbb{U}$.
Les racines de A_n est l'ensemble des racines $n+1$-ième de l'unité privé de 1.
A_n à n racines deux à deux distincts, donc ils sont toutes simples.

$\boxed{4.1.2}$ Notons $z_1,\ldots,z_n$ les racines du polynôme A_n, et soit w une racines de A'_n, puisque les racines de A_n sont toutes simples, alors w n'est pas une racine de A'_n. D'après le résultat de la question 2.2.2 il existe des réels $\beta_1\ldots,\beta_n$ strictement positifs de somme 1 tels que $w=\sum\limits_{k=0}^{n}\beta_k z_k$, il vient alors, par le résultat énoncé à la question 1.5, que $|w|<1$.

$\boxed{4.1.3}$ Les racines de B_n sont celles de A'_n et 0, ils sont toutes de module strictement inférieur à 1.

$\boxed{4.1.4}$ Le polynôme B_n est à coefficients réels, donc $\overline{B}=B$ (calcul au-dessous), et à l'aide d'un calcul simple on a $S_n=X^nB_n-X^nB_n(1/X)$ (une représentation de S_n de la forme (2), avec ici ; $Q=B_n$ toutes ses racines sont strictement inférieur à 1, $\varepsilon=1$ et $d=2n$), d'après le résultat de la question 3.7.3, toutes les racines de S_n sont de module 1.
Calcul :

$$\begin{aligned}
X^nB_n-X^nB(1/X) &= \sum_{k=1}^{n}X^{k+n}-\sum_{k=1}^{n}kX^{n-k}=\sum_{k=n+1}^{2n}(k-n)X^k-\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)X^k\\
&= \sum_{k=n+1}^{2n}(k-n)X^k+(n-n)X^n+\sum_{k=0}^{n-1}(k-n)X^k\\
&= \sum_{k=0}^{2n}(k-n)X^k=S_n
\end{aligned}$$

$\boxed{4.2}$ Si P est un polynôme dont toutes les racines sont de module 1, alors , d'après le résultat de la question 3.4.3 , P est auto-inverse, et par le résultat de la question 2.3, les racine de P sont toutes de module ≤ 1 : si w est une racine de P', et $z_1,\ldots,z_n$ les racines de P, il existe des réels positifs $\beta_1,\ldots,\beta_n$ et de somme 1 tels que $w=\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k z_k$ on a donc $|w|\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k|z_k|=\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k=1$.
Réciproquement, on suppose que P est auto-inverse de paramètre ε, et que toutes les racines de P' sont de module inférieur à 1.
On dérivant les deux membres de la relation (1) et notons aussi l'importance des identités suivantes : $\overline{\overline{P}}=P$ et $\overline{P}'=\overline{P'}$, on obtient ; $P'=d\varepsilon X^{d-1}\overline{P}(1/X)-\varepsilon X^{d-2}\overline{P'}(1/X)$, puis $\varepsilon dX^{d-1}\overline{P}(1/X)=P'(X)+\varepsilon X^{d-2}\overline{P'}(1/X)$, ou encore $\varepsilon d\dfrac{1}{X^{d-1}}\overline{P}(X)=P'(1/X)+\varepsilon\dfrac{1}{X^{d-2}}\overline{P'}(X)$, et en multipliant par X^{d-1}, on obtient $\varepsilon d\overline{P}(X)=X^{d-1}P'(1/X)+\varepsilon X\overline{P'}(X)$, il reste à faire la conjugaison au sens des polynôme pour obtenir ; $d\overline{\varepsilon}P(X)=X^{d-1}\overline{P'}(1/X)+\overline{\varepsilon}X\overline{\overline{P'}}(X)$, c'est-à-dire que le polynôme $d\overline{\varepsilon}P$ vérifie la formule (2) (avec $Q:=\overline{P'}$ dont toutes les racines sont de module ≤ 1, $d:=n=\deg P$, $n:=n-1=\deg\overline{P'}$, $\varepsilon:=\overline{\varepsilon}$), on en déduit alors que les racines de P sont toutes de module 1. (par application du résultat étendu des questions 3.5, 3.6 , 3.7).

$\boxed{4.3}$

$\boxed{4.3.1}$ On suppose que $\sum\limits_{k=1}^{d-1}|a_k|=0$: dans ce cas pour tout $k\in[\![1,d-1]\!]$, $a_k=0$, et le polynôme P est de la forme $P=a_dX^d+\varepsilon a_d=a_d(X^d+\varepsilon)$, et puisque $\varepsilon\in\mathbb{U}$, alors dans ce cas toutes les racines de P sont de module 1, ce sont les racines d-ième du nombre complexe $-\varepsilon\in\mathbb{U}$.

Dans la suite de cette question on suppose que $\sum_{k=1}^{d-1}|a_k|>0$. Utile dans les inégalités intervenantes dans le raisonnement suivant.

Si $d=2p$: on suppose que Q admet une racine z de module >1, $|z|>1$. De $Q(z)=0$, on obtient $\frac{1}{2}a_p+\sum_{k=1}^{p-1}a_{p+k}z^k+a_dz^p=0$, ainsi $|a_d||z|^p=|\frac{1}{2}a_p+\sum_{k=1}^{p-1}a_{p+k}z^k|\leq\frac{1}{2}|a_p|+\sum_{k=1}^{p-1}|a_{p+k}||z|^k$, et comme $1<|z|$, alors pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$, $|z|^k\leq|z|^{p-1}$, on a donc $|a_d||z|^p\leq\left(\frac{1}{2}|a_p|+\sum_{k=1}^{p-1}|a_{p+k}|\right)|z|^{p-1}$, d'autre part pour tout $k\in[\![1,p-1]\!]$, on a $|a_{k+p}|=|\varepsilon\overline{a_{2p-(p+k)}}|=|a_{p-k}|$, ce qui montre que ;
$\sum_{k=1}^{p-1}|a_{p+k}|=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{2}\left(|a_{p+k}|+|a_{p-k}|\right)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{2p=d-1}|a_k|$, il en résulte alors que
$\frac{1}{2}|a_p|+\sum_{k=1}^{p-1}|a_{p+k}|=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d-1}|a_k|$, donc $|a_d||z|^p\leq\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d-1}|a_k|\right)|z|^{p-1}<\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d-1}|a_k|\right)|z|^p$ notons ici l'importance de l'hypothèse $\sum_{k=1}^{d-1}|a_k|>0$ dans la deuxième inégalité, il vient alors que ; $|a_d|<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d-1}|a_k|$, qui est une contradiction . D'où le résultat.
De plus on a dans ce cas ;

$$\begin{aligned}
X^pQ+\varepsilon X^p\overline{Q}(1/X) &= \frac{1}{2}a_pX^p+\sum_{k=1}^{p}a_{p+k}X^{p+k}+\varepsilon\frac{1}{2}\overline{a_p}X^p+\sum_{k=1}^{p}\varepsilon\overline{a_{p+k}}X^{p-k}\\
&= \frac{1}{2}a_pX^p+\sum_{k=p+1}^{p}a_kX^k+\frac{1}{2}a_pX^p+\sum_{k=1}^{p}a_{p-k}X^{p-k}\\
&= a_pX^p+\sum_{k=p+1}^{p}a_kX^k+\sum_{k=0}^{p-1}a_kX^k\\
&= \sum_{k=0}^{2p}a_kX^k=P
\end{aligned}$$

Si $d=2p+1$: on suppose que Q admet une racine z de module >1, $|z|>1$, avec un raisonnement analogue, on obtient
$|a_d|<\sum_{k=1}^{p}|a_{k+p}|=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2}(|a_{k+p}|+|a_{p+1-k}|)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2p=d-1}|a_k|$, au passage on utilisé le fait que $|a_{p+k}|=|a_{2p+1-(p+k)}|=|a_{p+1-k}|$, et on a aussi une contradiction.
De plus on a dans ce cas ;

$$\begin{aligned}
X^{p+1}Q+\varepsilon X^p\overline{Q}(1/X) &= \sum_{k=1}^{p+1}a_{p+k}X^{p+k}+\sum_{k=1}^{p+1}\varepsilon\overline{a_{p+k}}X^{p-k+1}\\
&= \sum_{k=p+1}^{2p}a_kX^k+\sum_{k=1}^{p+1}a_{p+1-k}X^{p+1-k}\\
&= \sum_{k=p+1}^{2p}a_kX^k+\sum_{k=O}^{p}a_kX^k=P
\end{aligned}$$

Conclusion : dans le premier cas on a $P = X^p Q + \varepsilon X^p \overline{Q}(1/X)$, et dans le deuxième cas on a $P = X^{p+1} Q + \varepsilon X^p \overline{Q}(1/X)$, et comme les racines du polynôme Q sont toutes de module ≤ 1, alors P à toutes ses racines de module 1.

$\boxed{4.3.2}$ On pose $R = (X-1)P = \sum_{k=0}^{d+1} b_k X^k$, on a donc $b_0 = -a_0$, $b_k = a_{k-1} - a_k$ si $1 \leq k \leq d$, et $b_{d+1} = a_d$, par hypothèse on a $|b_{d+1}| \geq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{d-1} |b_{k+1}| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} |b_k|$, notons que le degré de R est $d+1$, d'après la question précédente, toutes les racines de R sont de module 1, en particulier les racines de P sont toutes de module 1.

$\boxed{4.3.3}$ L'application $v \mapsto \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{d-1} |a_k - v a_{k+1}|$ est continue sur le compact $\mathbb{U}$, donc atteint sa borne inférieure en un élément $\mu \in \mathbb{U}$, et on a donc
$|\mu^d a_d| = |a_d| \geq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{d-1} |a_k - \mu a_{k+1}| = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{d-1} |\mu^k a_k - \mu^{k+1} a_{k+1}|$, (car $|\mu| = 1$). Et on a le résultat par application du résultat de la question précédente au polynôme $P_\mu = \sum_{k=0}^{d} \mu^k X^k$.

FIN