**Un corrigé du concours Centrale-supélec Math-I- 2014 Filière MP**

Proposé par Mr : HAMANI Ahmed

## I- Une norme utile sur $M_d(\mathbb{R})$

**I-A– L'application $f_P$ est continue**

-Les applications $A \longmapsto I_d$ et $A \longmapsto A$ sont continues, la première est constante, la deuxième est linéaire avec $\dim M_d(\mathbb{R})$ est finie.

- Supposons que $A \longmapsto A^n$ est continue, alors $A \longmapsto A^{n+1}$ est la composée de $(A,B) \longmapsto AB$ qui est continue comme application bilinéaire avec $\dim M_d(\mathbb{R}) \times M_d(\mathbb{R})$ est finie, et de l'application $A \longmapsto (A, A^n)$ qui est continue comme application à composantes continues.

- L'application $f_P$ est combinaison linéaire d'applications continues, donc continue.

Remarque : on peut tout simplement dire que $f_P$ est à composantes polynômiales en les coéfficients de $A$.

**I-B– L'application $(.,.)$ est un produit scalaire**

$-\forall A, B, C \in M_d(\mathbb{R})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(A, B+\alpha C) = \mathrm{Tr}({}^tA(B+\alpha C)) = \mathrm{Tr}({}^tAB + \alpha {}^tAC) =$
$= \mathrm{Tr}({}^tAB) + \alpha \mathrm{Tr}({}^tAC) = (A,B) + \alpha(A,C)$.

$-\forall A, B \in M_d(\mathbb{R})$, $(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = (B,A)$.

$-\forall A \in M_d(\mathbb{R})$, $(A,A) = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq d} A_{i,j}^2 \geq 0$.

$-\forall A \in M_d(\mathbb{R})$, $(A,A) = 0 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq d} A_{i,j}^2 = 0 \Longrightarrow \forall i,j \in [[1,d]], A_{i,j} = 0 \Longrightarrow A = O_d$.

En conclusion $(.,.)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc $(.,.)$ est un produit scalaire.

**I-C– Comparaison entre $|A_{i,j}|$ et $\|A\|$**

$\|A\|^2 = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} A_{i,j}^2$, donc $\forall i,j \in [[1,n]]$, $A_{i,j}^2 \leq \|A\|^2$, donc $|A_{i,j}| \leq \|A\|$.

**I-D– La norme $\|.\|$ est sous multiplicative**

Soit $A, B \in M_d(\mathbb{R})$, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$(AB)_{i,j}^2 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{d} A_{i,k}B_{k,j}\right)^2 \leq \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{d} A_{i,k}^2\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{d} B_{k,j}^2\right)$, donc

$\|AB\|^2 = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq d} (AB)_{i,j}^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq d} \sum_{k=1}^{d} A_{i,k}^2 \sum_{k=1}^{d} B_{k,j}^2 = \left(\sum_{1\leq i,k\leq d} A_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1\leq j,k\leq d} B_{k,j}^2\right) = \|A\|^2\|B\|^2$, ca qui entraine que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

**I-E– Comparaison entre $\|A^n\|$ et $\|A\|^n$**

On va montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall A \in M_d(\mathbb{R})$, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

- Pour $n = 1$, on a égalité.

- Supposons que pour un certain $n \geq 2$, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, alors en utilisant l'hypothèse de récurrence et la sous multiplicativité de $(I-D)$, on obtient

$\|A^{n+1}\| = \|A^nA\| \leq \|A^n\|\|A\| \leq \|A\|^n\|A\| = \|A\|^{n+1}$.

## II- Séries entières de matrices

**II-A Définition et continuité de $\varphi$**

**Définition :** Soit $A \in \mathcal{B}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|A^n\| \leq \|A\|^n$ et $\|A\| < R$, donc $\displaystyle\sum_n a_n\|A\|^n$ converge et par comparaison, la série $\displaystyle\sum_n a_nA^n$ converge absolument, et puisque $M_d(\mathbb{R})$ est complet, on obtient la convergence de la série $\displaystyle\sum_n a_nA^n$ sur $\mathcal{B}$.

**Continuité :** Soit $r \in ]0,R[$, alors $\forall A \in M_d(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| \leq r$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|a_nA^n\| \leq |a_n|\|A\|^n \leq |a_n|r^n$, or la série $\displaystyle\sum_n a_nr^n$ est absolument convergente, donc la série $\displaystyle\sum_n a_nA^n$ converge normalement sur le compact $\{A \in M_d(\mathbb{R}) \ / \ \|A\| \leq r\}$ pour tout $r \in ]0,R[$, donc $\varphi$ est continue sur $\mathcal{B}$.

**II-B .**

**II.B.1 Existence de l'entier $r \in \mathbb{N}^*$**

On considère l'ensemble de $\mathbb{N}$ défini par $I = \{p \in \mathbb{N}^* \ / \ (A^i)_{0\leq i\leq p-1} \text{ est libre}\}$.

$1 \in I$, donc $I$ est non vide, et $(I, A, A^2, ..., A^{d^2})$ est liée ,donc $I$ est majoré par $d^2$, donc admet un maximum qu'on notera $r$, alors $r \in I$ et $r+1 \notin I$, donc $(A^i)_{0\leq i\leq r-1}$ est libre et $(A^i)_{0\leq i\leq r}$ est liée.

**II.B.2 Existence et unicité de l'r-uplet**

D'après la question précédente, $(A^i)_{0\leq i\leq r-1}$ est une famille libre maximale du sous-espace $F = \mathrm{Vect}((A^i)_{i\in\mathbb{N}})$, donc c'est une base de F, ce qui entraine l'existence et l'unicité des $(\lambda_{i,n})_{0\le i\le r-1}$ qui représentent les coordonnées de $A^n$ dans cette base.

II.B.3 **Existence de la constante $C>0$**

On considère la norme N sur $\mathbb{R}[A]=\mathrm{Vect}(I,A,\dots,A^{r-1})$ l'espace des polynômes en A, définie par $\forall B=\sum_{i=0}^{r-1}\alpha_iA^i$, $N(B)=\sum_{i=0}^{r-1}|\alpha_i|$, alors pour raison de finitude de dimension, cette norme est équivalente à la norme $\|.\|$, d'où l'existence de $C>0$ tel que $N\le C\|.\|$, ce qui entraine que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{r-1}|\lambda_{k,n}|=N(A^n)\le C\|A^n\|$.

II.B.4 **L'absolue convergence des série $\sum_n a_n\lambda_{k,n}$**

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall k\in[[0,r-1]]$, $|a_n\lambda_{k,n}|\le C|a_n|\|A^n\|$, or la série $\sum_n a_nA^n$ est absolument convergente, donc par comparaison, la série $\sum_n a_n\lambda_{k,n}$ converge absolument dans $\mathbb{C}$.

II.B.5 **$\varphi(A)$ est un polynôme en A**

De l'égalité de $II-B-2$, on obtient $\varphi(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nA^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{r-1}a_n\lambda_{k,n}A^k$, or d'après la question précédente, les séries $(\sum_n a_n\lambda_{k,n}A^k)_{0\le k\le r-1}$ sont convergentes donc :

$\varphi(A)=\sum_{k=0}^{r-1}(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\lambda_{k,n})A^k$, d'où l'existence de $P=\sum_{k=0}^{r-1}b_kX^k$ avec $b_k=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\lambda_{k,n}$.

Les $b_k$ sont les coordonnées de $\varphi(A)$ dans la base $(I,A,\dots,A^{r-1})$, ce qui assure l'unicité.

II.B.6 **Détermination de P dans un cas particulier**

Un calcul simple mène à $A^2=A$, donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $A^n=A$ , ce qui entraine que $\varphi(A)=I+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A}{n!}=I+(e-1)A$ et donc $P=1+(e-1)X$.

II-C **Condition nécessaire et suffisante**

- S'il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall A\in M_d(\mathbb{R})$ $\varphi(A)=P(A)$, alors $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, avec $A=\lambda I_d$, on obtient $\varphi(\lambda)=P(\lambda)$, donc $(a_n)_n$ est une suite réelle qui s'annule à partir d'un certain rang.
- La réciproque est immédiate.

## III-Deux applications

III-A .

III-A-1 **Énoncé du théorème**

Si deux séries complexes sont absolument convergente, alors la série produit est absolument convergente et on a : La somme de la série produit est égale au produit des sommes des deux séries.

Plus précisement : $\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k})=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\right)$.

III-A-2 **L'égalité $exp(iA)exp(iB)=exp(i(A+B))$**

La série $\sum_n\frac{z^n}{n!}$ converge absolument sur $\mathbb{C}$, donc d'après $(II-A)$,$\forall A\in M_d(\mathbb{C})$, $\sum_n\frac{A^n}{n!}$ converge absolument, ce qui permet le produit.

$$exp(iA)exp(iB)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iA)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iB)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(iA)^k}{k!}\frac{(iB)^{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^kA^kB^{n-k}\right).$$

Or $AB=BA$, donc $\sum_{k=0}^{n}C_n^kA^kB^{n-k}=(A+B)^n$, ce qui entraine que

$$exp(iA)exp(iB)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i(A+B))^n}{n!}=exp(i(A+B)).$$

III-A-3 **L'égalité $\cos^2(A)+\sin^2(A)=I_d$**

Soit $A\in M_d(\mathbb{R})$.

$$exp(iA)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iA)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}=\cos(A)+i\sin(A).$$

De même $exp(-iA)=\cos(A)-i\sin(A)$, donc

$Id=exp(O_d)=exp(iA-iA)=exp(iA)exp(-iA)=(\cos(A)+i\sin(A))(\cos(A)-i\sin(A))=$

$= \cos^2(A) - i\cos(A)\sin(A) + i\sin(A)\cos(A) - i^2\sin^2(A)$
Or d'après la question $II - B - 5$, $\cos(A)$ et $\sin(A)$ sont des polynômes en $A$, donc commutent, et par suite $I_d = \cos^2(A) + \sin^2(A)$.

III-B .

III-B-1 **L'inverse de la matrice** $(Re^{i\theta}I_d - A)$

Soit $\rho(A) = \max\{|\lambda| \ / \ \lambda \in Sp(A) \cap \mathbb{C}\}$, alors $\forall R > \rho(A)$, $Re^{i\theta} \notin Sp(A)$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, donc $Re^{i\theta}I_d - A$ est inversible dans $M_d(\mathbb{C})$.

De plus $\|(Re^{i\theta})^{-1}A\| = \dfrac{\|A\|}{R}$, donc si $R > \|A\|$, alors $\|(Re^{i\theta})^{-1}A\| < 1$ et par suite

$(I_d - (Re^{i\theta})^{-1}A)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left((Re^{i\theta})^{-1}A)^{-1}\right)^n$, ce qui donne l'égalité

$\forall R > \max(\|A\|, \rho(A)) = \|A\|$, $\left(Re^{i\theta}I_d - A\right)^{-1} = (Re^{i\theta})^{-1} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n}A^n$.

III-B-2 **Une expression intégrale de** $A^{n-1}$

Soit $R > \|A\|$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}\,d\theta = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{n-1-k}A^k\,d\theta$.

- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\theta \longmapsto (Re^{i\theta})^{n-1-k}A^k$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$.

- $\forall k \geq n$, $\|(Re^{i\theta})^{n-1-k}A^k\| = R^{n-1-k}\|A\|^k \underset{k \longrightarrow +\infty}{\sim} \left(\dfrac{\|A\|}{R}\right)^k$, or $\dfrac{\|A\|}{R} < 1$, donc

$\displaystyle\sum_k \left(\frac{\|A\|}{R}\right)^k$ est convergente, ce qui entraine que la série de fonctions $\displaystyle\sum_k (Re^{i\theta})^{n-1-k}A^k$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 2\pi]$.

Ces hypothèses nous permettent de permuter intégrale et somme, donc si $\delta_{k,l}$ est le symbole de Kröne-cker, alors $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}\,d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^{n-1-k}\,d\theta\right) A^k =$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{k,n-1}A^k = A^{n-1}$.

III-B-3 **Une expression intégrale de** $\chi_A(A)$

D'après la question précédente, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall R > \|A\|$, $A^k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^{k+1}(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}\,d\theta$, donc

$\chi_A(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_kA^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{d} a_k(Re^{i\theta})^{k+1}\right)(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}\,d\theta =$

$= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} Re^{i\theta}\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}\,d\theta$.

III-B-4 **La matrice** $\chi_A(A)$ **est nulle**

Soit $R > \|A\|$. On a : $\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} = (-1)^d.\ {}^t\mathrm{Com}(Re^{i\theta}I_d - A) = \left(P_{k,l}(Re^{i\theta})\right)_{1\leq k,l\leq d}$
où $P_{k,l}$ est un polynôme de degré $\leq d - 1$, ce qui entraine que

$\chi_A(A) = (c_{k,l})_{1\leq k,l\leq d}$ avec $c_{k,l} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} Re^{i\theta}P_{k,l}(Re^{i\theta})\,d\theta$.

Les polynômes $XP_{k,l}(X)$ sont sans coéfficient constant, donc $c_{k,l} = 0$.

En effet si $Q = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_jX^j$ est un polynôme sans coéfficient constant, alors

$\displaystyle\int_0^{2\pi} Q(Re^{i\theta})\,d\theta = \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^j\,d\theta = \sum_{j=1}^{m} a_j\delta_{0,j} = 0$.

En conclut qur $\chi_A(A)$ est la matrice nulle.

## IV-Étude d'une équation fonctionnelle

IV-A **Relation entre** $f$ **et sa primitive**

On considère la fonction définie sur $]-\infty, \dfrac{M}{2}[$, par $\varphi : \quad t \quad \longrightarrow \quad 2\left(F(x+t) - F(x+\alpha) - \dfrac{1}{4}F(2t) + \dfrac{1}{4}F(2\alpha)\right)$ ,

alors, $\varphi(\alpha) = 0$ et la continuité de $f$ assure que $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $]-\infty, \dfrac{M}{2}[$, avec

$\varphi'(t) = 2\left(f(x+t) - \dfrac{1}{2}f(2t)\right) = f(2x)$ (d'après $IV - 1$). En intégrant entre $\alpha$ et $y$, on aura

$\forall y \in ]-\infty, \dfrac{M}{2}[$, $\varphi(y) = (y - \alpha)f(2\alpha)$, ce qui donne l'égalité pour $y \neq \alpha$.

**IV-B La fonction $f$ est de classe $C^\infty$**

On montrera par récurrence que $f$ est de classe $C^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $f$ est déjà continue sur $]-\infty, M[$.
- On suppose que $f$ est classe $C^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, alors La fonction $F$ est de classe $C^{n+1}$ sur $]-\infty, M[$, donc par l'égalité précédente, la fonction $g: x \longrightarrow f(2x)$ l'est aussi sur $]-\infty, \frac{M}{2}[$, et par suite la fonction $f: x \longrightarrow g\left(\frac{x}{2}\right)$ est de classe $C^{n+1}$ sur $]-\infty, M[$.

En définitive $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-\infty, M[$.

**IV-C Solution de l'équation fonctionnelle**

En considérant la fonction $\varphi$ de la question $IV - A$, l'égalité établie dans cette question s'écrit $\forall x, y, \alpha \in ]-\infty, \frac{M}{2}[$ tel que $y \neq \alpha$, $f(2x) = \dfrac{\varphi(y) - \varphi(\alpha)}{y - \alpha}$, ce qui donne en tendant $y$ vers $\alpha$, $f(2x) = \varphi'(\alpha) = 2f(x+\alpha) - f(2\alpha)$.

Avec $\alpha = 0 < \frac{M}{2}$, on obtient $\forall x < \frac{M}{2}$, $f(2x) = 2f(x) - f(0)$, ce qui donne en dérivant deux fois que $f''(2x) = \frac{1}{2}f''(x)$, c'est à dire $\forall x \in ]-\infty, M[$, $f''(x) = \frac{1}{2}f''\left(\frac{x}{2}\right)$ et par récurrence on obtient $\forall x \in ]-\infty, M[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f''(x) = \frac{1}{2^n}f''\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Le passage à la limite dans cette égalité et la continuité de $f$ en $0$, entraine que $\forall x \in ]-\infty, M[$, $f''(x) = 0$.

- Si $f$ est une solution, alors $f'' = 0$, donc $f(x) = f(0) + f'(0)x$.
- Réciproquement, une fonction définie sur $]-\infty, M[$ par $f(x) = ax + b$ est continue et vérifie l'équation fonctionnelle, donc l'ensemble de solutions d'une telle équation est $Vect(1, x)$.

## V-Étude d'une autre fonction matricielle

**V-A Les fonctions $\zeta$ dans le cas $d = 1$**

Dans le cas $d = 1$, on cherche les fonctions continues $\zeta$ vérifiants $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0 \Longrightarrow \zeta(x) \neq 0$, ce sont les fonctions continues qui s'annulent au plus en $0$.

**V-B L'implication demandée**

Avec la matrice donnée par l'énoncé qu'on notera $A$, la condition $(V-1)$ s'écrit $\det(A) \neq 0 \Longrightarrow \det(f_\zeta) \neq 0$, c'est à dire $(\zeta(a)\zeta(d) - \zeta(b)\zeta(c)).\zeta(1)^{d-2} \neq 0$, ce qui entraine que $ad \neq bc \Longrightarrow \zeta(a)\zeta(d) \neq \zeta(b)\zeta(c)$.

**V-C Injectivité et stricte monotonie de $\zeta$**

- Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $\zeta(a) = \zeta(b)$, alors par contraposée de l'implication précédente avec $d = c = 1$, on obtient $\zeta(a) = \zeta(b) \Longrightarrow \zeta(a)\zeta(1) = \zeta(b)\zeta(1) \Longrightarrow a \times 1 = b \times 1 \Longrightarrow a = b$.
- On considère l'ensemble $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x < y\}$, et la fonction $F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \zeta(x) - \zeta(y) \end{array}$.
- $C$ est convexe, donc connexe par arcs, et $F = \zeta o p_1 - \zeta o p_2$ est continue du fait que $\zeta$ est continue et $p_1 : (x, y) \longmapsto x$ et $p_2 : (x, y) \longmapsto y$ sont linéaires et $\dim(\mathbb{R}^2) < +\infty$, donc continues.
- $F(C)$ est image continue d'un connexe par arcs, donc connexe par arcs de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle. De plus $0 \notin F(C)$, en effet si $0 \in F(C)$, alors $\exists (x, y) \in C$ tel que $\zeta(x) = \zeta(y)$ ce qui entraine par injectivité de $\zeta$ que $x = y$, ce qui contredit $x < y$.
- En conclut que $F(C) \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $F(C) \subset \mathbb{R}_-^*$, c'est à dire $\zeta$ est strictement monotone.

**V-D La fonction $\zeta$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = diag(a, 1, ..., 1) \in M_d(\mathbb{R})$, alors l'implication $(V-1)$ entraine que $\det(A) \neq 0 \Longrightarrow \det(f_\zeta(A)) \neq 0$, c'est à dire $a \neq 0 \Longrightarrow \zeta(a)\zeta(1)^{d-1} \neq 0 \Longrightarrow \zeta(a) \neq 0$.

**V-E** .

**V-E-1 Existence de $\alpha$**

Soit la fonction $g: t \longrightarrow \zeta(0)\zeta(2) - \zeta(1)\zeta(t)$ .

- $\zeta$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, donc par continuité de $\zeta$ et théorème des valeurs intermédiaires , $\zeta(0)\zeta(2) > 0$.
- $g(0)g(2) = \zeta(0)\zeta(2)(\zeta(2) - \zeta(1))(\zeta(0) - \zeta(1))$, or $\zeta$ est strictement monotone, donc $(\zeta(2) - \zeta(1))(\zeta(0) - \zeta(1)) < 0$, donc $g(0)g(2) < 0$ de plus $g$ est continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in ]0, 2[$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est à dire $\zeta(0)\zeta(2) = \zeta(1)\zeta(\alpha)$.

**V-E-2 Conclusion**

Par contraposée de l'implication de $(V-B)$, l'égalité précédente entraine que $0 \times 2 = 1 \times \alpha$, ce qui contredit que $\alpha > 0$, et par suite $\zeta(0) = 0$.

**V-F Une égalité vérifiée par $\eta$**

$\forall x, y \in I$ tel que $x^2, y^2, xy \in I$, alors $\zeta o\eta(x^2)\zeta o\eta(y^2) = x^2y^2 = (xy)^2 = [\zeta o\eta(xy)]^2$, donc d'après $(V-B)$, on obtient $\eta(x^2)\eta(y^2) = [\eta(xy)]^2$.

**V-G** Dans cette question $\eta$ prend des valeurs strictement positives sur $I \cap ]0, +\infty[ = ]0, M_1[$ où $M_1 = \lim\limits_{+\infty}(\zeta)$, donc $\eta$ est continue strictement croissante sur $I = ]m, M_1[$ $(m = \lim\limits_{-\infty}(\zeta))$.

V-G-1 **f vérifie l'équation** $(IV-1)$
- La définition de f exige que $\forall x \in D_f$, $e^x \in ]0, M_1[$, ce qui est équivalent à $x \in ]-\infty, \ln(M_1)[$, on prend $M = M_1$.
- $\forall x, y \in ]-\infty, \frac{M}{2}[$, en prenant en considération l'égalité de $(V-F)$, on obtient $f(2x)+f(2y) = \ln(\eta(e^{2x})) + \ln(\eta(e^{2y})) = \ln(\eta(e^{2x})\eta(e^{2y})) = \ln(\eta(e^x e^y))^2 = 2\ln o\eta(e^{x+y}) = 2f(x+y)$.

V-G-2 **Expression de** $\eta$ **sur** $I\cap ]0,+\infty[$
D'après la question $(IV-C)$, $\forall x \in ]-\infty, M[$, $f(x) = ax+b$ où $a, b \in \mathbb{R}$, donc $\eta(e^x) = e^{ax+b} = (e^x)^a.e^b$, ce qui entraine que $\forall x \in ]0, M_1[$, $\eta(x) = K_1 x^{\alpha_1}$ avec $K_1 = e^b > 0$ et $\alpha_1 = a > 0$ (car $\eta(0^+) = 0$).

V-G-3 **Expression de** $\eta$ **sur** $I\cap ]-\infty, 0[$
Soit $x \in ]-\infty, 0[\cap I = ]m, 0[$, la matrice $A = \begin{pmatrix} -x^2 & -xy \\ -xy & -y^2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, donc $\eta(-x^2)\eta(-y^2) = (\eta(-xy))^2$. On considère la fonction $g = \ln o(-\eta)o(-exp)$.
- La définition de g exige que $\forall x \in D_g$, $-e^x \in ]m, 0[$, c'est à dire $x \in ]-\infty, \ln(-m)[$, on obtient $\forall x, y \in ]-\infty, \frac{\ln(-m)}{2}[$, $g(2x)+g(2y) = \ln(-\eta(-e^{2x})) + \ln(-\eta(-e^{2y})) = \ln(\eta(-(e^x)^2).\eta(-(e^y)^2)) = \ln((-\eta(-e^x e^y))^2) = 2\ln(-\eta(-e^{x+y})) = 2g(x+y)$, donc d'après la question $(IV-C)$,
$\forall x \in ]-\infty, \ln(-m)[$, $g(x) = ax+b$, ce qui donne $-\eta(-e^x) = (e^x)^a.e^b$, donc
$\forall x \in ]m, 0[$, $\eta(x) = -e^b(-x)^a = K_2(-x)^{\alpha_2}$ avec $K_2 = -e^b < 0$ et $\alpha_2 = a > 0$ (car $\lim\limits_{x\longrightarrow m^+} \eta(x) = -\infty$).

V-G-4 $\eta$ **est une fonction impaire définie sur** $\mathbb{R}$
- Si $M_1 < +\infty$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow M^-} \eta(x) = K_1 M_1^{\alpha_1} < +\infty$, ce qui contredit que cette limite vaut $+\infty$.
- Si $m > -\infty$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow m^+} \eta(x) = K_2(-m)^{\alpha_2} > -\infty$, ce qui contredit que cette limite vaut $-\infty$.
- En prenant $y = \pm 1$ dans l'égalité de $(V-F)$, on aura
$\forall x \in I = \mathbb{R}$, $(\eta(x.1))^2 = \eta(x^2)\eta(1^2) = \eta(x^2)\eta((-1)^2) = (\eta(x.(-1)))^2$, donc $(\eta(x))^2 = (\eta(-x))^2$, et par suite $\eta(-x) = \pm\eta(x)$, or $\eta(0) = 0$ et $\eta$ est strictement monotone, donc $\eta(-x) = -\eta(x)$.

V-H **L'expression de** $\zeta$ **sur** $\mathbb{R}_+^*$
Soit $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant la condition $(V-1)$, alors $(-\zeta) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi continue et vérifie cette condition, quitte à remplacer $\zeta$ par $-\zeta$, on peut supposer que $\zeta$ est strictement croissante, et on serait dans les conditions de la question $(V-G)$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\eta(x) = Kx^\alpha$ où $\begin{cases} K > 0, & \text{si } \zeta \text{ est } \nearrow \\ K < 0, & \text{si } \zeta \text{ est } \searrow \end{cases}$ et $\alpha > 0$.
- Calculons $\zeta(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- Si $\zeta$ est croissante, alors elle prend ses valeurs positives et
$\forall x, y > 0$, $\zeta(x) = y \Longleftrightarrow x = \eta(y) = Ky^\alpha \Longleftrightarrow y = \left(\frac{x}{K}\right)^{1/\alpha}$, donc
$\forall x > 0$, $\zeta(x) = Cx^\beta$ avec $C = \left(\frac{1}{K}\right)^{1/\alpha} > 0$ et $\beta = \frac{1}{\alpha} > 0$.
- Si $\zeta$ est décroissante, alors $-\zeta$ est coissante, donc $\forall x > 0$, $\zeta(x) = -Kx^\beta$ avec $K > 0$ et $\beta > 0$.
En conclusion $\forall x > 0$, $\zeta(x) = Cx^\beta$ avec $C \neq 0$ et $\beta > 0$.
- La fonction $\eta$ est impaire sur $\mathbb{R}$, donc sa réciproque $\zeta$ est aussi impaire.

V-I **Déterminant de la matrice** $A_\lambda$
$rang(A_\lambda - (\lambda-1)I_d) = 1$, donc $\lambda - 1$ est une valeur propre de multiplicité $\geq d-1$, et $Tr(A_\lambda) = d\lambda$, donc l'autre valeur propre est $(\lambda+d-1) \neq (\lambda-1)$, donc $\det(A_\lambda) = (\lambda-1)^{d-1}(\lambda+d-1)$.

V-J **Les fonctions** $\zeta$ **vérifiant** $(V-1)$
D'après ce qui précède, si $\zeta$ vérifie la condition $(V-1)$, alors elle est impaire de restriction sur $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme $Cx^\beta$ où $\beta > 0$ et $C \neq 0$.
- Réciproquement soit une fonction $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ impaire de restriction sur $\mathbb{R}_+^*$, $\zeta(x) = Cx^\beta$ où $\beta > 0$.
- On remarque que si $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition $(V-1)$, alors $C\zeta$ tel que $C \neq 0$ vérifie aussi cette condition, donc on peut prendre $C = 1$.
- On considère la matrice $A_\lambda$ où $\lambda = -(d-1)^{1/\beta}$, alors $\det(f_\zeta(A_\lambda)) = \det(A_{1-d}) = 0$, donc $\det(A_\lambda) = 0 = (\lambda-1)^{d-1}(\lambda+d-1) = 0$, ce qui exige $\lambda = 1-d$, c'est à dire $d-1 = (d-1)^{1/\beta}$, et par suite si $d \neq 2$, $\beta = 1$ ce qui entraine que $\zeta(x) = Cx$ où $C \neq 0$.
- Reste le cas $d = 2$. $\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, si $\zeta(a)\zeta(d) = \zeta(b)\zeta(c)$, alors $\zeta(ad) = \zeta(bc)$, or $\zeta$ est injective, donc $ad = bc$, ce qui entraine que si $d = 2$, les fonctions cherchées sont les fonctions continues impaires de restriction $\zeta(x) = Cx^\beta$ sur $\mathbb{R}_+^*$.