Corrigé du CCP 2013 maths 1

Exercice 1

1°. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$ car f est impaire, et $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \dfrac{-2}{n\pi}[(-1)^n - 1]$, donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, b_{2n}(f) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, b_{2n+1}(f) = \dfrac{4}{(2n+1)\pi}$

Donc la série de Fourier de f est $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)t$

2°. La première série converge du CSSA, et la 2ème converge de Riemann.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f} = f$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}; f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)t$

En particulier pour $t = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient puisque $\sin(2n+1)\dfrac{\pi}{2} = (-1)^n$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$.

La formule de Parseval s'applique ici car f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et donne :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16}{(2n+1)^2\pi^2} = 2\|f\|_2^2 = 2$, c'est à dire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 2

1°. $\chi_A = (X-2)^2$ et du théorème de Cayley Hamilton, $(A - 2I_n)^2 = 0$, donc B est nilpotente.

$e^{t(A-2I_n)} = I_n + t(A - 2I_n)$, alors $e^{tA} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}$

2°. Le système donné est équivalente à $X' = AX$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$X' = AX$ ssi $X = e^{tA}X_0$, où X_0 est un vecteur colonne.

Mais $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = X_0$, donc $X = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $x(t) = (1-3t)e^{2t}$ et $y(t) = (2+3t)e^{2t}$.

Problème : Séries entières de Taylor et DSE

1°. La série donné a un rayon de convergence 1.

D'autre part la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} x^n$ a un rayon de convergence 1, de somme sur $]-1,1[$ égal à $\dfrac{1}{1-x}$,

mais cette série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

2°. Une intégration par partie donne le résultat, et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$

3°. $\displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$, donc la propriété donnée est valable pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que cette propriétés est valable à l'ordre n, alors par une intégration par partie, on obtient :

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$$

Le résultat est donc vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4°. La fonction $\sin$ est DSE en 0 et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} x^{2p+1}$,

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} x^{2p}$, égalité encore valable en $x = 0$.

f est somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, alors elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5°. On prend $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n.n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ des préliminaires, et ceci pour tout $x \in]-1,1[$, f est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle et vérifiant la condition donnée.

6°. **a/** $\forall x \in [0,1]$, $\left| f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leqslant M \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|$ et la série de terme général $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ est absolument convergente, donc la série donnée converge normalement sur $[0,1]$.

b/ Toutes les applications $x \longmapsto f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ sont continues sur $[0,1]$, et la série de $a)$ converge normalement sur $[0,1]$, alors on peut permuter ici les signes $\int$ et $\sum$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(x))^2 dx &= \int_0^1 f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 f(x) x^n dx \\ &= 0 \text{ par hypothèse} \end{aligned}$$

L'application f^2 est continue positive d'intégrale nulle sur $[0,1]$, alors $f = 0$ sur $[0,1]$.

c/ $f = 0$ sur $[0,1]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ car f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.

$\forall x \in]-R,R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$

7°. L'application $g : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est bien définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais $\forall x \in]-1,1[, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Et l'application $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

8°. **a/** Aux élèves

b/ Par une récurrence simple le résultat est donné.

c/ Par récurrence et par application du Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^1$.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,+\infty[$ et que $f^{(n)}(0) = 0$.

f est continue sur $[0,+\infty[$, et $f(0) = 0$, la propriété est donc vérifié pour $n = 0$.

Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}^*$, f est $\mathcal{C}^n$ sur $[0,+\infty[$ et que $f^{(n)}(0) = 0$,

On a $\lim_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$,

alors f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,+\infty[$ de plus $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,+\infty[$ et que $f^{(n)}(0) = 0$.

d/ Si f est DSE sur $]-\tau,\tau[$, alors $\forall x \in]-\tau,\tau[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ ce qui est absurde car la fonction f ne s'annule qu'en 0.

9°. a/ La fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\dfrac{e^{-t}}{1+tx^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-t})$ et $t \to e^{-t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé l'application $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Pour $t \in [0,+\infty[$ fixé l'application $g_t : x \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $g_t'(x) = \dfrac{-2xte^{-t}}{(1+tx^2)^2}$, de plus :

Pour tout $a > 0$, $\forall x \in [-a,a], \forall t \in [0,+\infty[$, $\dfrac{|-2xt|e^{-t}}{(1+tx^2)^2} \leqslant 2ate^{-t}$

L'application $t \longmapsto 2ate^{-t}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ le théorème de dérivation sous signe intégrale s'applique et alors f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de plus $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-2xte^{-t}}{(1+tx^2)^2}dt$.

b/ Pour $t \in]0,+\infty[, \forall x \in]-\dfrac{1}{\sqrt{t}}, \dfrac{1}{\sqrt{t}}[$, $\dfrac{e^{-t}}{(1+tx^2)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^p e^{-t} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (2p)! t^p e^{-t}}{(2p)!} x^{2p}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, g_t^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)! t^n e^{-t}$ et $g_t^{(2n+1)}(0) = 0$.

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_t^{(n)}(0)dt$,

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f^{(2n)}(0) &= \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n e^{-t} (2n)! dt \\ &= (-1)^n (2n)! \Gamma(n+1) \\ &= (-1)^n (2n)! n! \end{aligned}$$

Et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$,

c/ On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} \\ &= \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n n! x^{2n} \end{aligned}$$

qui a un rayon de convergence nul et ne converge qu'en 0.
Évidement la fonction f n'est pas DSE à l'origine.

10°. a/ On applique la formule de Taylor avec reste intégral suivante : pour tout $x \in]-a,a[$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^k(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt$$

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right| \leqslant M \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right| = M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

La série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

Alors $\forall x \in]-a,a[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$ et f est DSE à l'origine.

b/ La fonction $\sin$ répond à la question sur $\mathbb{R}$.

sadikoulmeki@yahoo.fr