

CORRIGÉ : MATH 1 ; MP ; Centrale_2013

I - Les équations de Cauchy-Riemann

Soient f et g dans $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad ; \quad \tilde{f}(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(r, \theta) = g(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$

I.A.1) $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

I.A.2) D'après les équations de Cauchy-Riemann, et les formules de la question précédente :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - \sin(\theta) \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r, \theta).$$

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \theta) = -\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta).$$

I.B - Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit φ_α la fonction de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} définie par : $\forall t > 0 \quad ; \quad \varphi_\alpha(t) = t^\alpha$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ε_n est l'espace des fonctions f de $C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad t^2 f''(t) + t f'(t) - n^2 f(t) = 0.$$

I.B.1) Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, α un réel, et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$t^2 \varphi_\alpha''(t) + t \varphi_\alpha'(t) - n^2 \varphi_\alpha(t) = \alpha(\alpha - 1)t^\alpha + \alpha t^\alpha - n^2 t^\alpha = (\alpha^2 - n^2)t^\alpha.$$

$$\varphi_\alpha \in \varepsilon_n \text{ si et seulement si } \alpha = \pm n.$$

I.B.2) a) Recherche de ε_0 . Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$.

$f \in \varepsilon_0$ si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad t^2 f''(t) + t f'(t) = 0$ si et seulement si

$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad f''(t) = -\frac{1}{t} f'(t)$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad f'(t) = \frac{\lambda}{t}$.

$$\varepsilon_0 = \{ f \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}) \quad tq \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad f(t) = \lambda \ln(t) + \mu \}.$$

b) Recherche de $\varepsilon_n \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}^*$.

φ_n et φ_{-n} sont deux solutions sur \mathbb{R}_+^* , linéairement indépendantes de l'équation différentielle :

$$t^2 y'' + t y' - n^2 y = 0.$$

ε_n est un \mathbb{C} espace vectoriel de dimension 2, alors $\varepsilon_n = \text{vect}(\varphi_n, \varphi_{-n})$.

I.C - Pour $n \in \mathbb{Z}$, soient $c_{n,f}$ et $c_{n,g}$ les fonctions de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{C} définies par :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \begin{cases} c_{n,f}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \\ c_{n,g}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \end{cases}.$$

I.C.1) L'application $[(r, \theta) \mapsto \tilde{f}(r, \theta) e^{-in\theta}]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, alors l'expression

$c_{n,f}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta$ définit une application de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* avec :

$$\forall r > 0 ; (c_{n,f})'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{f}(r, \theta) e^{-in\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

$$\forall r > 0 ; (c_{n,f})'(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (\text{d'après la question I.A.2})$$

$$\forall r > 0 ; (c_{n,f})'(r) = \frac{1}{2\pi r} [\tilde{g}(r, \theta) e^{-in\theta}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{in}{r} c_{n,g}(r).$$

N.B : On n'a pas besoin de vérifier l'hypothèse de domination, car il s'agit d'une intégration sur un segment de \mathbb{R} .

I.C.2) On refait un travail analogue à celui de la question précédente pour montrer que $c_{n,g}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\forall r > 0 ; (c_{n,g})'(r) = -\frac{in}{r} c_{n,f}(r)$. Par conséquent :

$$\forall r > 0 ; (c_{n,f})''(r) = -\frac{in}{r^2} c_{n,g}(r) + \frac{in}{r} (c_{n,g})'(r) = -\frac{1}{r} (c_{n,f})'(r) + \frac{n^2}{r^2} c_{n,f}(r).$$

$$\text{D'où : } \forall r > 0 ; r^2 (c_{n,f})''(r) + r (c_{n,f})'(r) - n^2 c_{n,f}(r) = 0.$$

Montrons que $c_{n,f}$ est bornée au voisinage de 0.

$f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, donc en particulier continue sur la boule unité fermée de \mathbb{R}^2 qui est compacte, donc bornée sur cette boule \bar{B} .

$$\exists M > 0 ; \forall x \in \bar{B} ; |f(x)| \leq M, \text{ donc } \forall r \in]0, 1] ; \forall \theta \in \mathbb{R} ; |\tilde{f}(r, \theta)| \leq M.$$

$$\text{D'où } \forall r \in]0, 1] ; |c_{n,f}(r)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(r, \theta) e^{-in\theta}| d\theta \leq M.$$

$c_{n,f}$ est donc bornée au voisinage de 0.

a) Selon **I.B.2)**, Il existe des réels a_0, b_0 tels que : $\forall r > 0 ; c_{0,f}(r) = a_0 + b_0 \ln(r)$.

Puisque $c_{0,f}$ est bornée au voisinage de 0 alors $b_0 = 0$.

b) Selon **I.B.2)** Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, il existe des réels a_n, b_n tels que : $\forall r > 0 ; c_{n,f}(r) = a_n r^{|n|} + b_n r^{-|n|}$.

Encore puisque $c_{n,f}$ est bornée au voisinage de 0 alors $b_n = 0$.

I.C.3) On fixe $r > 0$, l'application $[\theta \mapsto \tilde{f}(r, \theta)]$ est 2π -périodique de classe C^1 sur \mathbb{R} , donc somme de sa série de Fourier sur \mathbb{R} .

$$\text{D'où } \forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} ; \tilde{f}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,f}(r) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=-p}^p a_n r^{|n|} e^{in\theta}.$$

I.D - Dans cette question on suppose que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur \mathbb{R}^2 .

$$\text{I.D.1) D'après I.A.1) } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

$$\text{alors } \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) \right| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right|.$$

$$\text{alors } \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) \right| \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

$$\text{D'après ce qui précède, } \forall r > 0 ; |(c_{n,f})'(r)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) \right| d\theta.$$

D'où $(c_{n,f})'$ est bornée sur \mathbb{R}_+^* .

I.D.2) D'après **I.C.2)**, $\forall n \in \mathbb{Z}$, tel que : $|n| \geq 2 ; \forall r > 0 ; (c_{n,f})'(r) = |n| a_n r^{|n|-1}$.

et puisque $(c_{n,f})'$ est bornée sur \mathbb{R}_+^* , alors $a_n = 0$.

$$\text{On déduit d'après I.C.3), } \forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} ; \tilde{f}(r, \theta) = a_{-1} r e^{-i\theta} + a_0 + a_1 r e^{i\theta}.$$

$$\text{D'après I.A.1) } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = a_{-1} e^{-i\theta} + a_1 e^{i\theta} = (a_{-1} + a_1) \cos(\theta) + i(a_1 - a_{-1}) \sin(\theta)$$

Les fonctions \cos et \sin sont linéairement indépendantes, alors

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} ; \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = (a_{-1} + a_1) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = i(a_1 - a_{-1}).$$

D'où les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont constantes.

II - Quelques solutions de (1)

On rappelle l'équation : (1) $\forall (x,y) \in \Omega$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = 1$.
 Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^2 et f une fonction inconnue de $C^2(\Omega, \mathbb{R})$.

Si I est un intervalle de \mathbb{R} , on dit que $u \in C^1(I, \mathbb{R})$ vérifie (II.1) sur I si et seulement si :

$$\forall t \in I ; u(t)(u(t) + 2tu'(t)) = -1.$$

II.A) Soit $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ et $\varphi \in \mathcal{P}_2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \varphi(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = 4ac - b^2.$$

φ vérifie (1) si et seulement si $4ac - b^2 = 1$.

II.B) Posons : $h(t,x) = -\frac{1+x^2}{2tx}$. h est de classe C^1 sur l'ouvert $(\mathbb{R}^*)^2$.

Si $(t_0, u_0) \in (\mathbb{R}^*)^2$, alors d'après le théorème de Cauchy Lipschitz, il existe une et une seule solution maximale (I, u) de l'équation : $x' = h(t,x)$, tel que I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} inclus dans \mathbb{R}^* contenant t_0 et tel que $u(t_0) = u_0$. On a alors $u \in C^1(I, \mathbb{R})$ solution de (II.1).

II.C) Soit J un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} .

Supposons qu'il existe une solution polynômiale u de (II.1) sur J .

par passage au degré dans l'équation (II.1), $\deg(u) = 0$ et u est constant et $u^2 = -1$.

Il n'existe donc pas de solution polynômiale de (II.1) sur un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} .

II.D) Soient J un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} . $\Omega(J) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy \in J\}$.

$w \in C^2(J, \mathbb{R})$ et W la fonction définie par : $\forall (x,y) \in \Omega(J)$; $W(x,y) = w(xy)$.

II.D.1) $\forall x \in J$; $(1,x) \in \Omega(J)$, alors $\Omega(J)$ est une partie non vide de \mathbb{R}^2 .

$\Omega(J) = \Phi^{-1}(J)$ avec Φ la forme bilinéaire sur \mathbb{R} définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $\Phi(x,y) = xy$.

Φ est continue et J un ouvert de \mathbb{R} , alors $\Omega(J)$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

II.D.2) W est la composée de deux fonctions de classe C^2 , alors $W \in C^2(\Omega(J), \mathbb{R})$

$$\forall (x,y) \in \Omega(J) ; \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = x^2 y^2 (w''(xy))^2 - (w'(xy) + xy w''(xy))^2$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = -w'(xy)(w'(xy) + 2xy w''(xy)).$$

Si W vérifie (1) sur $\Omega(J)$, alors en remplaçant y par 1 et x quelconque dans J , on trouve que w vérifie (II.1) sur J , et la réciproque est évidente (en posant $t = xy$).

II.D.3) Si w est affine, c'est évident que W est la restriction à $\Omega(J)$ d'une fonction de \mathcal{P}_2 .

Réciproquement, supposons que W est la restriction à $\Omega(J)$ d'une fonction de \mathcal{P}_2 .

Il existe $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ tel que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $W(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$

$\forall x \in J$; $w(x) = W(x,1) = ax^2 + (b+d)x + c + e + f$.

Par identification des fonctions polynômes $W(x,1) = W(1,x)$, on a : $a = c$ et $d = e$.

$$W(x,y) = a(x+y)^2 + d(x+y) + (b-2a)xy + f.$$

Fixons t dans J . Pour tout réel s tel que : $s^2 > 4t$, il existe $(x,y) \in \Omega(J)$ tel que :
$$\begin{cases} x+y = s \\ xy = t \end{cases}.$$

$W(x,y) = as^2 + ds + (b-2a)t + f$ indépendant de s , donc $a = d = 0$.

$\forall t \in J$; $w(t) = W(1,t) = bt + f$.

D'où w est une fonction affine.

II.E) Soient Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur Ω , $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\Omega_{a,b}$ l'image de Ω par la translation de vecteur (a, b) et $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\Omega_{a,b}$ par :

$$\forall (x, y) \in \Omega_{a,b} \quad ; \quad f_{a,b}(x, y) = f(x - a, y - b).$$

Tout provient du fait que : $\forall (x, y) \in \Omega_{a,b} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - a, y - b) \quad ;$

$$\frac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x - a, y - b) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - a, y - b).$$

II.F) D'après **II.B)** il existe une solution maximale (I, u) de **(II.1)** tel que I est un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , inclus dans \mathbb{R}_+^* .

Soit w_0 une primitive de u sur I , et posons : $\forall \gamma \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall t \in I \quad ; \quad w_\gamma(t) = w_0(t) + \gamma$.

$\forall (x, y) \in \Omega(I) \quad ; \quad W_\gamma(x, y) = w_\gamma(xy)$ définit d'après **II.D.2)** une solutions de (1) sur $\Omega(I)$.

D'après **II.C)** u ne peut pas être une fonction polynômiale sur I , donc w_γ ne peut pas être une fonction affine, alors d'après **II.D.3)** aucun des W_γ n'est la restriction à $\Omega(I)$ d'un élément de \mathcal{P}_2 .

Soient $t_0 \in I$, alors $(t_0, 1) \in \Omega(I)$, posons $(a, b) = (x_0, y_0) - (t_0, 1)$ et U l'ouvert de \mathbb{R}^2 , image de $\Omega(I)$ par la translation de vecteur (a, b) . U contient évidemment (x_0, y_0) .

$\forall \gamma \in \mathbb{R} \quad ; \quad V_\gamma(x, y) = W_\gamma(x - a, y - b) = w_0((x - a)(y - b)) + \gamma$, définit une solution de (1) sur U .

La famille $(V_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{R}}$ est une famille infinie de solutions de (1) sur U , et aucun des V_γ n'est la restriction à U d'un élément de \mathcal{P}_2 .

III - Un critère de difféomorphisme

III.A) Définition :

Une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, est dite un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 , s'elle est bijective de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et f^{-1} aussi de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Théorème :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 , les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .

(ii) f est bijective et $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad df_p \in GL(\mathbb{R}^2)$.

Dans la suite de cette partie, on considère $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

On suppose que $\forall (p, h) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \langle dF_p(h), h \rangle \geq \alpha \|h\|^2$.

On se propose dans cette partie de montrer que F est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .

III.B) - Soient $p, q \in \mathbb{R}^2$.

III.B.1) Soit ϕ l'application définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 par $\phi(t) = F(tq + (1 - t)p)$.

ϕ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, alors $\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t) dt$.

$$C'est \text{ à dire : } F(q) - F(p) = \int_0^1 dF_{tq+(1-t)p}(q-p) dt = \int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q-p) dt$$

$$\mathbf{III.B.2)} \quad \langle F(q) - F(p), q - p \rangle = \langle \int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q-p) dt, q - p \rangle$$

$$\int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q-p) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n dF_{p+\frac{k}{n}(q-p)}(q-p) \text{ et le produit scalaire est une forme bilinéaire}$$

$$\text{continue sur } \mathbb{R}^2, \text{ alors : } \langle F(q) - F(p), q - p \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \langle dF_{p+\frac{k}{n}(q-p)}(q-p), q - p \rangle.$$

$$\langle F(q) - F(p), q - p \rangle = \int_0^1 \langle dF_{tq+(1-t)p}(q-p), q - p \rangle dt \geq \int_0^1 \alpha \|q - p\|^2 dt = \alpha \|q - p\|^2.$$

III.C) - Soient $a \in \mathbb{R}^2$ et G^a l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par : $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad G^a(p) = \|F(p) - a\|^2$.

III.C.1) Soient $p, h \in \mathbb{R}^2$. $G^a(p + h) = \langle F(p + h) - a, F(p + h) - a \rangle$

$G^a(p+h) = \langle F(p) - a + dF_p(h) + \|h\|\varepsilon(h), F(p) - a + dF_p(h) + \|h\|\varepsilon(h) \rangle$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

$$G^a(p+h) = G^a(p) + 2 \langle F(p) - a, dF_p(h) \rangle + \|h\| (2 \langle F(p) - a + dF_p(h), \varepsilon(h) \rangle + \|h\| \|\varepsilon(h)\|^2) + \|dF_p(h)\|^2$$

$$G^a(p+h) = G^a(p) + 2 \langle F(p) - a, dF_p(h) \rangle + o(\|h\|). \text{ puisque } \|dF_p(h)\|^2 \leq \|dF_p\|^2 \|h\|^2.$$

$\|dF_p\|$ désigne la norme subordonnée à la norme Euclidienne sur \mathbb{R}^2 appliquée à dF_p .

Ainsi $\boxed{\forall p, h \in \mathbb{R}^2 ; dG_p^a(h) = 2 \langle F(p) - a, dF_p(h) \rangle}$

III.C.2) D'après **III.B.2)** $\forall p, q \in \mathbb{R}^2 ; \langle F(q) - F(p), q - p \rangle \geq \alpha \|q - p\|^2$

En particulier pour $p = 0, \forall q \in \mathbb{R}^2 ; \langle F(q) - F(0), q \rangle \geq \alpha \|q\|^2$

Soit encore : $\langle F(q), q \rangle \geq \alpha \|q\|^2 + \langle F(0), q \rangle \geq \underbrace{\alpha \|q\|^2 - \|F(0)\| \cdot \|q\|}_{\text{Cauchy Schwarz}}$

$$\forall q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} ; \|F(q)\| \geq \underbrace{\frac{\langle F(q), q \rangle}{\|q\|}}_{\text{Cauchy Schwarz}} \geq \alpha \|q\| - \|F(0)\|.$$

D'où $\lim_{\|q\| \rightarrow +\infty} \|F(q)\| = +\infty$ et par suite $\lim_{\|p\| \rightarrow +\infty} G^a(p) = +\infty$.

III.C.3) D'après la question précédente, il existe $R > 0$, tel que pour tout $p \in \mathbb{R}^2, G^a(p) > G^a(0)$ dès que $\|p\| > R$.

G^a est continue sur la boule fermée compacte $\bar{B}(0, R)$ donc bornée et atteint ses bornes sur cette boule. Si p_0 est un point où G^a atteint sa borne inf sur $\bar{B}(0, R)$ alors $G^a(0) \geq G^a(p_0)$.

p_0 est donc un minimum globale de G^a sur \mathbb{R}^2 .

III.C.4) F est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2, F est injective d'après **III.B.2)** et d'après l'hypothèse :

$\forall p, h \in \mathbb{R}^2 ; \langle dF_p(h), h \rangle \geq \alpha \|h\|^2$, on déduit que $\forall p \in \mathbb{R}^2 ; \ker(dF_p) = \{0\}$.

$\forall p \in \mathbb{R}^2 ; dF_p \in GL(\mathbb{R}^2)$, alors d'après le théorème d'inversion globale, F réalise un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur un ouvert V de \mathbb{R}^2 .

Par l'absurde supposons que $F(p_0) \neq a$, Soit $r > 0$ tel que la boule $B(F(p_0), r) \subset V$.

Sur le segment liant $F(p_0)$ à a , il y'a un point q de la boule $B(F(p_0), r)$ tel que :

$\|q - a\| < \|F(p_0) - a\|$, soit $p \in \mathbb{R}^2$ tel que : $F(p) = q$.

$G^a(p) < G^a(p_0)$ ce qui est absurde. Finalement $G^a(p_0) = a$.

III.D) On a vu à la question précédente que F réalise un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur un ouvert V de \mathbb{R}^2 . On a aussi montré à la question précédente que F est surjective.

D'où F réalise un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .

IV - Le théorème de Jörgens

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant **(1)** sur \mathbb{R}^2 .

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soient $u(x, y) = x + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $v(x, y) = y + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ et $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

On suppose dans les questions **IV.A)** et **IV.B)** que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$.

$$\text{IV.A - } JacF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

$$JacF(x,y) - I_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \text{ (notations de Mange) .}$$

C'est une matrice symétrique réelle de déterminant $1 > 0$ telle que $r > 0$, elle alors symétrique définie positive.

Alors : $\forall p, h \in \mathbb{R}^2$; $\langle dF_p(h) - h, h \rangle \geq 0$ et par suite : $\forall p, h \in \mathbb{R}^2$; $\langle dF_p(h), h \rangle \geq \|h\|^2$. De plus $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ alors d'après la partie précédente, F réalise un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .

IV.B - Dans la suite on notera :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad r(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \quad ; \quad s(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \quad ; \quad t(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

$$\text{On a alors : } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad r(x,y) > 0 \quad \text{et} \quad r(x,y)t(x,y) - s(x,y)^2 = 1.$$

IV.B.1) D'après **IV.A)** F réalise un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .

$$\text{Posons : } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \begin{cases} G(x,y) = (x - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -y + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) \\ H(x,y) = G \circ F^{-1}(x,y) = (\varphi(x,y), \psi(x,y)) \end{cases}$$

$$\text{On a : } G, H \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \text{ et } \varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ et } H \circ F = G.$$

$$\text{D'où l'existence de } \varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ tels que : } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \begin{cases} \varphi(u(x,y), v(x,y)) = x - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \psi(u(x,y), v(x,y)) = -y + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases} .$$

$$\text{IV.B.2)} \quad \begin{cases} 1 - r = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = (1+r) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + s \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ -s = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = s \frac{\partial \varphi}{\partial u} + (1+t) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{cases} .$$

$$\Delta = (1+r)(1+t) - s^2 = 2 + r + t > 0.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} 1-r & s \\ -s & 1+t \end{vmatrix}}{2+r+t} = \frac{(1-r)(1+t) + s^2}{2+r+t} = \frac{t-r}{2+r+t} \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{t-r}{2+r+t}}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\begin{vmatrix} 1+r & 1-r \\ s & -s \end{vmatrix}}{2+r+t} = \frac{-s(1+r) - s(1-t)}{2+r+t} = \frac{-2s}{2+r+t} \cdot \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{-2s}{2+r+t}}$$

$$\begin{cases} s = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = (1+r) \frac{\partial \psi}{\partial u} + s \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ -1+t = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = s \frac{\partial \psi}{\partial u} + (1+t) \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{cases}$$

$$\Delta = (1+r)(1+t) - s^2 = 2 + r + t > 0.$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} s & s \\ -1+t & 1+t \end{vmatrix}}{2+r+t} = \frac{s(1+t) - s(-1+t)}{2+r+t} = \frac{2s}{2+r+t} \cdot \boxed{\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{2s}{2+r+t}}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{\begin{vmatrix} 1+r & s \\ s & -1+t \end{vmatrix}}{2+r+t} = \frac{(1+r)(-1+t)-s^2}{2+r+t} = \frac{t-r}{2+r+t} \cdot \boxed{\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{t-r}{2+r+t}}.$$

$$\text{IV.B.3) } \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| = \left| \frac{t-r}{2+r+t} \right| \leq \frac{t+r}{2+r+t} \leq 1 \text{ et } \left| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| = \left| \frac{-2s}{2+r+t} \right| \leq \frac{2|s|}{2+r+t} = 2 \frac{\sqrt{rt-1}}{2+r+t} \leq \frac{2\sqrt{rt}}{r+t} \leq 1.$$

$$\text{IV.B.4) } \varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ tels que : } \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

et puisque ces dérivées partielles sont bornées sur \mathbb{R}^2 , alors d'après I.D.2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial v} \text{ sont constantes.}$$

$$\text{IV.B.5) Posons : } \alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \text{ et } \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \text{ alors d'après IV.B.2) } \alpha = \frac{t-r}{2+r+t} \text{ et } \beta = \frac{-2s}{2+r+t}$$

$$\alpha^2(2+r+t)^2 = (t-r)^2 \text{ et } \beta^2(2+r+t)^2 = 4s^2 = 4(rt-1).$$

$$\text{La somme de ces deux équations donne : } (\alpha^2 + \beta^2)(2+r+t)^2 = (t+r)^2 - 4$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 - 1)(t+r)^2 + 4(\alpha^2 + \beta^2)(t+r) + 4(\alpha^2 + \beta^2 + 1) = 0.$$

On voit ceci comme une équation de second degré d'inconnu $(t+r)$.

$$\Delta' = 4 \text{ et } (t+r) = \frac{-2(\alpha^2 + \beta^2) \pm 2}{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)} \text{ et puisque } (t+r) > 0 \text{ alors : } (t+r) = \frac{2(1 + \alpha^2 + \beta^2)}{(1 - \alpha^2 - \beta^2)} = \gamma.$$

$$\begin{cases} t-r = \alpha(2+\gamma) \\ t+r = \gamma \end{cases} \text{ et } t = \frac{\alpha(2+\gamma)+\gamma}{2} \text{ et } r = \frac{\gamma-\alpha(2+\gamma)}{2} \text{ et } s = -\frac{1}{2}\beta(2+\gamma) \text{ sont constantes.}$$

IV.C - Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (1). Remarquons que $-f$ vérifie aussi (1).

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \right)^2 + 1 > 0$$

L'application $\left[(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \right]$ est continue sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles et ne s'annule pas, alors garde un signe constant sur \mathbb{R}^2 , alors d'après la remarque ci-dessus on peut supposer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0.$$

On est alors dans les conditions de IV.A) et de IV.B).

r, s , et t sont constantes sur \mathbb{R}^2 .

$$\text{Posons : } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; A(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - rx - sy \text{ et } B(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - sx - ty.$$

$$A \text{ et } B \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ et } \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y} = 0.$$

Alors A et B sont constantes sur \mathbb{R}^2 , Posons : $A(x,y) = p$ et $B(x,y) = q$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = p + rx + sy \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = q + sx + ty$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x,y) = px + r\frac{x^2}{2} + sxy + g(y) \text{ avec } g'(y) = q + ty.$$

D'où il existe une constante réelle k telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x,y) = px + qy + r\frac{x^2}{2} + t\frac{y^2}{2} + sxy + k.$$