

# Épreuve : MATHÉMATIQUES I

Filière MP

Les calculatrices sont autorisées

Dans tout le problème l'ensemble  $\mathbf{C}$  des nombres complexes est considéré comme le plan affine euclidien muni de son repère orthonormé canonique  $(0, 1, i)$  (où  $i^2 = -1$ ).

- On notera  $K$  l'ensemble des triplets  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de  $\mathbf{R}^3$  constitués de trois réels positifs ou nuls tels que  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ .

- Si  $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$ , on notera  $\widehat{abc}$  le "triangle plein" défini par :

$$\widehat{abc} = \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in K\}.$$

Dans tout le problème on notera  $\tau_0, \tau_1$  et  $\tau$  les triangles pleins définis par :

$$\tau_0 = \widehat{-10i}.$$

$$\tau_1 = \widehat{01i}.$$

$$\tau = \widehat{-11i}.$$

- On notera également  $\phi_0$  et  $\phi_1$  les applications de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}$  définies par (en notant  $\bar{z}$  le conjugué du nombre complexe  $z$ ) :

$$\phi_0(z) = \frac{1+i}{2}\bar{z} + \frac{-1+i}{2} \quad \text{et} \quad \phi_1(z) = \frac{1-i}{2}\bar{z} + \frac{1+i}{2}.$$

- La notation  $\{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$  désignera l'ensemble des suites  $(r_n)_{n \geq 1}$  d'entiers naturels tels que  $r_n \in \{0, 1\}$  pour tout entier naturel non nul  $n$ .
- La norme de la convergence uniforme sur le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{C}$  est notée  $\|\cdot\|_\infty$ .
- La partie entière du réel  $x$  est notée  $[x]$ . Si  $n$  est un entier naturel on posera, pour tout réel  $x$  et tout entier naturel non nul  $n$  :

$$r_n(x) = [2^n x] - 2[2^{n-1} x].$$

- On notera  $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$  l'ensemble des rationnels de la forme  $\frac{k}{2^n}$  où  $k \in \mathbf{Z}$  et  $n \in \mathbf{N}$ .
- On rappelle enfin que, si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une famille de parties de  $\mathbf{C}$  indexées sur  $\mathbf{N}^*$ , on a :

$$\bigcap_{n \geq 1} X_n = \{z \in \mathbf{C} \mid \forall n \in \mathbf{N}^*, z \in X_n\}$$

L'objectif du problème est la construction d'une application  $f$  continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{C}$  dont l'image  $f([0, 1])$  est le triangle plein  $\tau$  et l'étude de quelques unes de ses propriétés.

## Partie I - Préliminaires géométriques

I.A -

I.A.1) Établir que  $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$ .

I.A.2) Représenter sur une même figure  $\tau_0, \tau_1, \tau$ .

I.A.3)

a) Soit  $a \in \mathbf{C}$  et  $\theta \in \mathbf{R}$ . Prouver que l'image  $z'$  du complexe  $z$  par la réflexion dont l'axe est la droite passant par  $a$  et dirigée par  $e^{i\theta}$  vérifie la relation :

$$z' - a = e^{2i\theta} \overline{(z - a)}$$

b) Établir une relation analogue à celle de la question précédente entre un complexe  $z$  et son image  $z'$  par l'homothétie de centre  $a$  et de rapport  $\rho > 0$ .

c) Démontrer que  $\phi_0$  est la composée d'une réflexion dont on précisera l'axe et d'une homothétie de rapport strictement positif à préciser et dont le centre appartient à l'axe de la réflexion. Prouver une propriété analogue pour  $\phi_1$ . Ces décompositions sont-elles uniques ?

I.A.4) Que vaut l'image d'un triangle plein  $\widehat{abc}$  par  $\phi_0$  et par  $\phi_1$  ? Déterminer  $\phi_0(\tau)$  et  $\phi_1(\tau)$ .

I.B - (Diamètre d'un triangle plein)

I.B.1)

a) Démontrer que  $K$  est un compact de  $\mathbf{R}^3$  pour sa topologie usuelle.

b) Démontrer que  $K$  est convexe c'est à dire que, pour tout réel  $t \in [0, 1]$  et tout couple  $(u, v)$  d'éléments de  $K$ ,  $tu + (1-t)v$  appartient à  $K$ .

c) Établir que, si  $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$ ,  $\widehat{abc}$  est un compact convexe de  $\mathbf{C}$  muni de sa topologie usuelle.

d) Avec les mêmes notations prouver l'existence de :

$$\delta(\widehat{abc}) = \max\{|z' - z| \mid (z, z') \in \widehat{abc}^2\}$$

I.B.2)

a) Démontrer que, si l'on fixe  $z \in \mathbf{C}$  et  $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$

$$\max\{|z' - z| \mid z' \in \widehat{abc}\} = \max(|z - a|, |z - b|, |z - c|).$$

b) En déduire une expression simple de  $\delta(\widehat{abc})$ .

I.B.3) Soit  $(r_n)_{n \geq 1}$  un élément de  $\{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$ . Pour chaque entier naturel non nul  $n$ , on note  $\tilde{\tau}_n = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \dots \circ \phi_{r_n}(\tau)$ .  
 Montrer que  $\bigcap_{n \geq 1} \tilde{\tau}_n$  est réduit à un seul point appartenant à  $\tau$ .

## Partie II - Construction de l'application $f$

II - Dans la suite on note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des applications  $g$  continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{C}$  telles que  $g(0) = -1$  et  $g(1) = 1$ . Si  $g \in \mathcal{E}$ , on note  $Tg$  l'application de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{C}$  définie par :

$$Tg(x) = \phi_0(g(2x)) \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } Tg(x) = \phi_1(g(2x - 1)) \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[.$$

II.1) Déterminer l'unique élément  $f_0$  de  $\mathcal{E}$  qui soit affine.

II.2) Montrer que  $Tg \in \mathcal{E}$  pour tout  $g \in \mathcal{E}$ .

II.3) Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux éléments de  $\mathcal{E}$ . Prouver que :

$$\|Tg_2 - Tg_1\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}} \|g_2 - g_1\|_\infty.$$

II.4) On définit maintenant une suite  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{E}$  en choisissant  $f_0$  affine comme ci-dessus et  $f_{n+1} = Tf_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

a) Prouver que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers une fonction  $f \in \mathcal{E}$ .

b) Prouver que  $Tf = f$ .

c) Prouver que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = -\overline{f(1-x)}$  et interpréter géométriquement cette relation.

## Partie III - Propriétés de $f$

### III.A - Image de $f$

III.A.1) Soit  $(r_n)_{n \geq 1} \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$

a) Montrer que la série de terme général  $\frac{r_n}{2^n}$  converge et que sa somme  $x$  appartient à  $[0, 1]$ .

b) En posant pour tout entier naturel  $p$ ,  $x_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+p}}{2^n}$ , prouver la relation :

$$f(x) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \dots \circ \phi_{r_p}(f(x_p))$$

pour tout entier naturel non nul  $p$ .

III.A.2) Inversement, soit  $x \in [0, 1[$ .

a) Établir que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $r_n(x) \in \{0, 1\}$ .

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $N$  et tout réel  $x \in [0, 1[$  :

$$\frac{[2^N x]}{2^N} = \sum_{n=1}^N \frac{r_n(x)}{2^n} \quad \text{puis} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}.$$

c) Montrer que si, en outre,  $x \in \mathbf{Z} \left[\frac{1}{2}\right]$  alors il existe  $N \in \mathbf{N}$  tel que  $r_n(x) = 0$  pour tout entier naturel  $n > N$ .

d) Calculer  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $f\left(\frac{1}{4}\right)$ . Reconnaitre  $\phi_0 \circ \phi_0$  et en déduire  $f\left(\frac{1}{2^k}\right)$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$ .

III.A.3)

a) Montrer que  $f\left([0, 1] \cap \mathbf{Z} \left[\frac{1}{2}\right]\right) \subset \tau$ .

b) Montrer que  $f([0, 1]) \subset \tau$ .

III.A.4) Inversement, soit  $z \in \tau$ .

a) Montrer qu'on peut définir deux suites  $(z_n)_{n \geq 0}$  et  $(r_n)_{n \geq 1}$  de la manière suivante :

- $z_0 = z$  et, si  $n \geq 1$  :
- si  $z_{n-1} \in \tau_0$  alors  $r_n = 0$  et  $z_n = (\phi_0)^{-1}(z_{n-1})$
- sinon  $r_n = 1$  et  $z_n = (\phi_1)^{-1}(z_{n-1})$ .

Prouver que, pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$ ,  $z_n$  appartient à  $\tau$ .

b) Prouver que  $f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n}\right) = z$  (on pourra exprimer  $z$  en fonction de  $z_n$  et des  $\phi_{r_i}$ ).

c) Ecrire une fonction qui prend en argument un complexe  $z$  (que l'on supposera dans  $\tau$ ) et un réel  $\epsilon$  et qui renvoie une valeur approchée à  $\epsilon$  près d'un antécédent de  $z$ .

III.A.5)

a) Prouver que  $f$  n'est pas injective (on pourra utiliser la relation  $f(1-x) = -\overline{f(x)}$ ).

b) Plus généralement montrer qu'il n'existe aucune bijection continue de  $[0, 1]$  sur  $\tau$  (on pourra utiliser un argument de connexité par arcs).

III.A.6)

a) Pour  $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ , déterminer l'expression complexe de  $\phi_i \circ \phi_j$ , la reconnaître, préciser son point fixe et l'image de  $\tau$ . Faire un dessin.

b) Soient  $r_1, r_2, \dots, r_p$  des éléments de  $\{0, 1\}$ . Prouver que  $\phi = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \dots \circ \phi_{r_p}$  possède un unique point fixe que l'on ne cherchera pas nécessairement à exprimer simplement.

c) Exhiber, à l'aide de l'application  $f$ , un point fixe de  $\phi$ .

d) Montrer que l'ensemble  $X$  des complexes  $z$  qui sont point fixe de la composée d'un nombre fini d'applications  $\phi_0$  et  $\phi_1$  est dense dans  $\tau$ .

### III.B - Dérivabilité de $f$

III.B.1) Supposons que  $f$  soit dérivable sur  $[0, 1]$ .

Soient  $x \in [0, 1]$ ,  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  et  $(\beta_n)_{n \geq 1}$  deux suites d'éléments de  $[0, 1]$ , convergentes vers  $x$  et telles que  $\alpha_n \leq x \leq \beta_n$  et  $\alpha_n < \beta_n$  pour tout  $n$ .

Montrer que la suite de terme général  $\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$  converge vers  $f'(x)$ .

III.B.2) Soit  $x \in [0, 1]$

a) Si  $x \in [0, 1[$ , en choisissant :

$$\alpha_n = \frac{r_1(x)}{2} + \dots + \frac{r_n(x)}{2^n} \text{ et } \beta_n = \alpha_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

prouver que  $f$  n'est pas dérivable en  $x$ .

b) Prouver que  $f$  n'est pas dérivable en 1.

---

••• FIN •••

---