

Concours Communs Marocain - Session 2009

Corrigé de l'épreuve d'algèbre

Polynôme d'interpolation de Lagrange. Approximation au sens de moindres carrées

Corrigé par M.TARQI

1^{ère} Partie : Étude de l'application f_m

1. R étant un polynôme de degré inférieure ou égal à n , admettant $n + 1$ racines distinctes, donc R est le polynôme nul.
2. Soient $P, Q \in \mathcal{P}_m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$\begin{aligned} f_m(P + \lambda Q) &= ((P + \lambda Q)(x_0), \dots, (P + \lambda Q)(x_n)) \\ &= (P(x_0), \dots, P(x_n)) + \lambda(Q(x_0), \dots, Q(x_n)) \\ &= f_m(P) + \lambda f_m(Q) \end{aligned}$$

Donc f_m est une application linéaire.

3. (a) Il est clair que $\{Q\pi/Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\} \subset \ker f_m$, puisque $Q\pi \in \mathcal{P}_m$ et $f_m(Q\pi) = 0$. D'autre part, si $P \in \ker f_m$, alors x_0, x_1, \dots, x_n seront des racines de P , donc il est divisible par π . Ainsi $\ker f = \{Q\pi/Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$.

- (b) Soit $P \in \mathcal{P}_m$, alors il existe un couple unique (Q, R) de polynômes tels que $P = Q\pi + R$, avec $R = 0$ ou $\deg R \leq n$, et comme $Q\pi \in \ker f_m$ et $R \in \mathcal{P}_m$, alors

$$\mathcal{P}_m = \ker f_m \oplus \mathcal{P}_n.$$

- (c) D'après la dernière question, $\dim \ker f_m = m - n$. La famille $\{\pi, X\pi, \dots, X^{m-n-1}\pi\}$ est une base de $\ker f_m$.

- (d) Toujours d'après la question (b) de cette partie, $\text{rg } f_m = n + 1$, donc f_m est surjective puisque $\dim \mathbb{R}^{n+1} = n + 1$.

4. (a) Si $P \in \mathcal{P}_m$ tel que $f_m(P) = 0$, alors le polynôme P aura $n+1$ racines distinctes et comme $m \leq n$, alors $P = 0$ et donc f_m est injective.

- (b) $\text{rg } f_m = \dim \mathcal{P}_m = m + 1$.

- (c) f_m est surjective si et seulement si $\dim \mathcal{P}_m = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, c'est-à-dire $m = n$.

5. (a) L'application

$$\begin{aligned} f_m : \mathcal{P}_n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{aligned}$$

étant bijective ($m = n$), donc pour tout élément $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un seul polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que $f_n(P_y) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$.

- (b) i. D'après la définition des L_i , on a $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$.

- ii. La famille (L_1, L_2, \dots, L_n) est une base de \mathcal{P}_n , comme image réciproque de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} , par l'isomorphisme f_n .

- (c) Posons

$$(y_0, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=0}^n y_i \varepsilon_i$$

On aura alors,

$$P_y = \sum_{i=1}^p y_i f_n^{-1}(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^p y_i L_i.$$

Soit $P = \sum_{i=0}^n L_i$, alors $P(x_i) = 1$ pour tout $0 \leq i \leq n$, donc d'après la question

1. de cette partie $P = 1$, d'où :

$$\sum_{i=0}^n L_i = 1.$$

2^{ème} partie : Problème aux moindres carrés

1. (a) Soit $y \in \text{Im } A$, alors il existe $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ tel que $y = Ax$. Donc

$$\langle b - Au, y \rangle_p = \langle b - Au, Ax \rangle_p = {}^t x^t A(b - Au) = 0,$$

ainsi $b - Au$ est orthogonal à $\text{Im } A$.

Comme les vecteurs $b - Au$ et Ax sont orthogonaux, alors d'après Pythagore, $\|b - Ax\| = \|b - Au\| + \|A(u - x)\| \geq \|b - Au\|$ et d'après la caractérisation de la projection $Au = P_{\text{Im } A}(b)$.

(b) On a, pour tout $x \in \mathcal{M}_{q,1}$ $\|b - Au\| \leq \|b - Ax\| + \|Ax - Au\| \leq \|b - Ax\|$, donc

$$\|b - Au\| = \min\{\|b - Ax\|_p / x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})\}$$

ce minimum est atteint pour tout vecteur $x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ tel que $Ax = Au$.

2. On sait, d'après la question 1.(a) de cette partie, que $b - Au$ est orthogonal à $\text{Im}(A)$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}) \langle b - Au, Ax \rangle = {}^t x^t A(b - Au) = \langle x, {}^t A(b - Au) \rangle = 0$, donc le vecteur ${}^t A(b - Au)$ est orthogonal à tous x de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, en particulier il est orthogonal à lui-même, c'est-à-dire $\|{}^t A(b - Au)\| = 0$, ainsi ${}^t A(b - Au) = 0$.

3. (a) Si $x \in \ker {}^t AA$, alors $\langle Ax, Ax \rangle_p = {}^t x^t AAx = 0$.

(b) Il est clair que $\ker A \subset \ker {}^t AA$ et d'après la question précédente, si $x \in \ker {}^t AA$, alors $\|Ax\|_p^2 = 0$, donc $Ax = 0$ et par suite $x \in \ker A$, d'où l'égalité.

(c) $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}(A) = p - \dim \ker(A) = p - \dim \ker({}^t AA) = \text{rg}({}^t AA)$.

(d) Soit $y \in \text{Im} {}^t AA$, donc il existe $x \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $y = {}^t AAx$, c'est-à-dire $y \in \text{Im} {}^t A$, d'où l'inclusion demandée. Les deux assertions $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}({}^t AA)$ et $\text{Im} {}^t AA \subset \text{Im} {}^t A$ entraînent $\text{Im} {}^t A = \text{Im} {}^t AA$.

4. (a) D'après l'étude précédente, le problème aux moindres carrés admet une solution si et seulement si il existe $u \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^t AAu = {}^t Ab$ c'est-à-dire le système ${}^t AAu = {}^t Ab$ admet des solutions, ce qui est toujours possible, d'après la question 3.(c).

(b) Supposons $\ker A = \{0\}$ et soit u et v de tels ${}^t AAu = {}^t Ab$ et ${}^t AAu = {}^t Ab$, alors $u - v \in \ker {}^t AA = \ker {}^t A = \{0\}$, donc $v = u$ et par conséquent le problème admet une solution unique.

3^{ème} Partie : Approximation polynomiale au sens des moindres carrés

A. Étude dans le cas $m \geq n + 1$

1. On sait qu'il existe un unique polynôme $Q_0 \in \mathcal{P}_n$ tel que $f_n(Q_0) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$, c'est le polynôme $\sum_{i=0}^n y_i L_i$ défini dans la première partie. D'autre part $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_m$ et la restriction de f_m à \mathcal{P}_n n'est autre que f_n , alors on aura nécessairement

$$f_m(Q_0) = (y_0, y_1, \dots, y_n).$$

2. On a $Q_0 \in \mathcal{P}_m$ et $\phi_m(Q_0) = 0$, donc $\lambda_m = 0$. D'autre part $\phi_m(P) = 0$ si et seulement si $P(x_i) = y_i$ pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n$, donc l'ensemble des polynômes de \mathcal{P}_m où le minimum est atteint est donc $\{P \in \mathcal{P}_m / f_m(P) = (y_0, y_1, \dots, y_n)\}$

B. Étude dans le cas $m \leq n$

1. (a) tAA est une matrice carée d'ordre $m + 1$ et son coefficient d'indice (i, j) est donné par :

$$\sum_{k=0}^n x_k^i x_k^j.$$

- (b) On a un sous déterminant maximal non nul d'ordre $m + 1$ extrait de A , à savoir

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^m \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq m} (x_i - x_j)$$

donc $\text{rg } A = m + 1$.

- (c) On sait que $\text{rg}^t AA = \text{rg}^t A = \text{rg } A = m + 1$, donc tAA est inversible.

2. (a) On a évidemment

$$AV_p = {}^t(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)).$$

- (b) On calcule

$$\|b - AV_p\|_{n+1}^2 = \|(y_0 - P(x_0), \dots, y_n - P(x_n))\|_{n+1}^2 = \sum_{i=0}^n (y_i - P(x_i))^2 = \phi_m(P).$$

3. (a) D'après la partie précédente, on sait qu'il existe, puisque tAA est inversible, un unique vecteur $U = (c_0, c_1, \dots, c_m)$ tel que

$$\|b - AU\|_{n+1}^2 = \min\{\|b - AX\|_{n+1}^2 / x \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})\}$$

donc le polynôme $P_0 = \sum_{k=0}^m c_k X^k$ répond à la question.

- (b) D'après la question précédente le vecteur $U = V_{P_0}$ est l'unique solution du système linéaire ${}^tAAZ = {}^tAb$.

- (c) $\lambda_m = \Phi_m(P_0)$.

4. Application

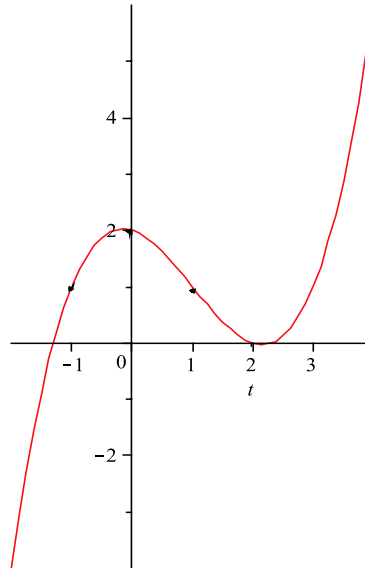
(a) On trouve $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ et ${}^tAA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 18 \\ 6 & 8 & 18 & 32 \\ 8 & 18 & 32 & 66 \end{pmatrix}$

(b) On a ${}^tAb = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) On trouve $U = (2, \frac{-1}{3}, -1, \frac{1}{3})$.

(d) $P_0(X) = 2 - \frac{1}{3}X - X^2 + \frac{1}{3}X^3$ et $\lambda_3 = \|b - Au\|_4^2 = 0$.

(e) Le graphe de la fonction $t \mapsto P_0(t)$ et les quatre points (x_i, y_i) .



•••••

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr