

CORRIGÉ : MATH 2 ; MP ; Centrale_2009

Partie I : Produit de deux endomorphismes autoadjoints positifs

On se propose dans cette partie de montrer que si $u, v \in S^+(E)$, alors $u \circ v$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans \mathbb{R}^+ .

I-A - Généralités

I-A-1)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $u = u^*$, alors u est diagonalisable dans une base orthonormale de E .

\Rightarrow] On suppose que u est positif (resp défini positif).

Soient λ une valeur propre de u , et $x \in E$ un vecteur propre de u associé à λ .

$(u(x) | x) = \lambda(x | x) \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$. (resp $(u(x) | x) = \lambda(x | x) > 0 \Rightarrow \lambda > 0$)

Alors $Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$ (resp $Sp(u) \subset \mathbb{R}^{**}$)

\Leftarrow] Si $Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$ (resp $Sp(u) \subset \mathbb{R}^{**}$)

Soit (x_1, \dots, x_n) une base orthonormale de E , de vecteurs propres de u .

Pour chaque $i \in [[1, n]]$, on note λ_i la valeur propre de u associée à x_i .

Soit $x = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x_i \in E$. $(u(x) | x) = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \alpha_i^2 \geq 0$

(resp $(u(x) | x) = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \alpha_i^2 \geq 0$ et si $x \neq 0$, $\exists i_0 \in [[1, n]]$ tq $\alpha_{i_0} \neq 0$ et $(u(x) | x) \geq \lambda_{i_0} \alpha_{i_0}^2 > 0$)

Alors u est positif (resp u est défini positif)

I-A-2) Soient $u \in S^{++}(E)$, (x_1, \dots, x_n) une base orthonormale de vecteurs propres de u et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice de u dans cette base, la matrice de u^{-1} dans cette base est $D^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ est symétrique dans une base orthonormale, alors $u^{-1} \in S(E)$.

De plus $Sp(u^{-1}) = \{\lambda_i^{-1} ; 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}^{**}$, alors $u^{-1} \in S^{++}(E)$.

I-A-3) Soit $u \in S^+(u)$.

a) Soient (x_1, \dots, x_n) une base orthonormale de vecteurs propres de u et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice de u dans cette base. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ dans cette base. Puisque Δ est symétrique et la base (x_1, \dots, x_n) est orthonormale, alors $s \in S(E)$.

De plus $Sp(s) = \{\sqrt{\lambda_i} ; 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}^+$, alors $s \in S^+(E)$. De plus $\Delta^2 = D$ alors $s^2 = u$.

b) Soit $x \in E$ tel que : $(u(x) | x) = 0$, alors $(s^2(x) | x) = 0 = (s(x) | s^*(x)) = (s(x) | s(x))$.

Alors $s(x) = 0$ et $u(x) = s^2(x) = 0$.

I-B - Preuve du résultat

Soient $u, v \in S^+(E)$.

I-B-1) On note u_1 et w les endomorphismes de $\text{Im}(u)$ induits par u et $u \circ v$ respectivement.

a) Soient $x, y \in \text{Im}(u)$; $(u_1(x) | y) = (u(x) | y) = (x | u(y)) = (x | u_1(y))$. d'où $u_1 \in S(\text{Im}(u))$.

Soit $x \in \text{Im}(u)$, $\exists t \in E$ tel que : $x = u(t)$.

$(u_1(x) | x) = (u(x) | x) \geq 0$ alors $u_1 \in S^+(\text{Im}(u))$ et $Sp(u_1) \subset \mathbb{R}^+$.

$u_1(x) = 0 \Rightarrow u \circ u(t) = 0 \Rightarrow (u \circ u(t) | t) = 0 = (u(t) | u(t)) \Rightarrow x = u(t) = 0$.

$0 \notin Sp(u_1)$ alors $Sp(u_1) \subset \mathbb{R}^{**}$ et $u_1 \in S^{++}(\text{Im}(u))$.

b) Soient $x, y \in \text{Im}(u)$. Puisque $u_1 \in S^{++}(\text{Im}(u))$, d'après I-A-2) $u_1^{-1} \in S^{++}(\text{Im}(u))$.

$\phi_{u_1^{-1}}(w(x), y) = (u \circ v(x) | u_1^{-1}(y)) = (v(x) | u \circ u_1^{-1}(y)) = (v(x) | u_1 \circ u_1^{-1}(y))$

$\phi_{u_1^{-1}}(w(x), y) = (v(x) | y) = (x | v(y)) = (u \circ u_1^{-1}(x) | v(y)) = (u_1^{-1}(x) | u \circ v(y))$

$$\phi_{u_1^{-1}}(w(x), y) = \phi_{u_1^{-1}}(x, w(y)).$$

Alors w est symétrique pour $\phi_{u_1^{-1}}$, et pour $y = x$, on obtient : $\phi_{u_1^{-1}}(w(x), x) = (v(x) | x) \geq 0$.

D'où : w est symétrique positif pour le produit scalaire $\phi_{u_1^{-1}}$.

I-B-2) On suppose que $\text{Im}(u \circ v) \neq \{0\}$. (si non rien à montrer)

w est un endomorphisme diagonalisable de $\text{Im}(u)$ (car w est symétrique pour le produit scalaire $\phi_{u_1^{-1}}$) alors la restriction de w au sous espace stable $\text{Im}(u \circ v)$ est aussi diagonalisable, de plus d'après la question précédente $Sp(w) \subset \mathbb{R}^+$.

On conclut alors que la restriction de $u \circ v$ à $\text{Im}(u \circ v)$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans \mathbb{R}^+ .

I-B-3) Soit $x \in \text{Im}(u \circ v) \cap \ker(u \circ v)$, $w(x) = 0$, alors $0 = \phi_{u_1^{-1}}(w(x), x) = (v(x) | x)$.

Alors d'après (1), $v(x) = 0$. Il existe $t \in E$ tel que : $x = u \circ v(t) \Rightarrow v \circ u \circ v(t) = 0$.

$0 = (v \circ u \circ v(t) | t) = (u \circ v(t) | v(t)) \Rightarrow x = u \circ v(t) = 0$ (encore d'après (1))

$\text{Im}(u \circ v) \cap \ker(u \circ v) = \{0\}$, alors d'après le théorème du rang, $E = \text{Im}(u \circ v) \oplus \ker(u \circ v)$.

I-B-4) Si $u \circ v = 0$ alors $u \circ v$ est diagonalisable et $Sp(u \circ v) = \{0\} \subset \mathbb{R}^+$.

On suppose alors que $u \circ v \neq 0$, $\text{Im}(u \circ v)$ est somme directe de sous espaces propres de w .

Alors d'après la question précédente, E est somme directe de sous espaces propres de $u \circ v$. $u \circ v$ est diagonalisable et $Sp(u \circ v) \subset Sp(w) \cup \{0\} \subset \mathbb{R}^+$.

I-C - Cas particulier

Soient $a \in S^{++}(E)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

I-C-1)

a) Soit $y \in F$, l'application $[x \mapsto (f(x) | y)]$ est une forme linéaire sur E , alors il existe un unique vecteur $g(y) \in E$ tel que : $\forall x \in E ; (f(x) | y) = (x | g(y))$. Donc

Il existe une unique application $g : F \rightarrow E$ telle que : $\forall (x, y) \in E \times F ; (f(x) | y) = (x | g(y))$.

Montrons que g est linéaire.

Soient $y, z \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $\forall x \in E$, on a :

$$(x | g(\lambda y + z) - \lambda g(y) - g(z)) = (x | g(\lambda y + z)) - \lambda(x | g(y)) - (x | g(z))$$

$$(x | g(\lambda y + z) - \lambda g(y) - g(z)) = (f(x) | \lambda y + z) - \lambda(f(x) | y) - (f(x) | z) = 0.$$

$\forall y, z \in F ; g(\lambda y + z) - \lambda g(y) - g(z) = 0$. D'où la linéarité de g .

Dans la suite l'application g est notée f^* .

b) Soit $y \in F$.

$$f^*(y) = 0 \Leftrightarrow [\forall x \in E ; (x | f^*(y)) = 0] \Leftrightarrow [\forall x \in E ; (f(x) | y) = 0] \Leftrightarrow y \in [\text{Im}(f)]^\perp.$$

c) Soit $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\text{Im}(f)$ telle que la suite $(f^*(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

$\ker(f^*) = [\text{Im}(f)]^\perp$, alors $\ker(f^*) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

La restriction φ de f^* à $\text{Im}(f)$ est un isomorphisme entre $\text{Im}(f)$ et $f^*(\text{Im}(f))$, φ^{-1} est linéaire en dimension finie, alors φ^{-1} est continue. $z_k = \varphi^{-1}(f^*(z_k)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

d) Soient $x, y \in E$. $(f^* \circ f(x) | y) = (f(x) | f(y)) = (x | f^* \circ f(y))$. Alors $f^* \circ f \in S(E)$.

De plus : $\forall x \in E ; (f^* \circ f(x) | x) = (f(x) | f(x)) \geq 0$. D'où $f^* \circ f \in S^+(E)$.

I-C-2) On a : $a \in S^{++}(E)$, alors d'après I-A-2) $a^{-1} \in S^{++}(E) \subset S^+(E)$ et $f^* \circ f \in S^+(E)$, alors d'après I-B) $a^{-1} \circ f^* \circ f$ est un endomorphisme diagonalisable de E et $Sp(a^{-1} \circ f^* \circ f) \subset \mathbb{R}^+$.

On note ρ la plus grande valeur propre de $a^{-1} \circ f^* \circ f$.

I-C-3) Soit $x \in E$, $\|f(x)\|^2 = (f(x) | f(x)) = (x | f^* \circ f(x)) = (x | a \circ a^{-1} \circ f^* \circ f(x))$

$$\|f(x)\|^2 = (a(x) | a^{-1} \circ f^* \circ f(x)) = \phi_a(x, a^{-1} \circ f^* \circ f(x)).$$

D'après I-C-1-b) $(\text{Im}(f^* \circ f))^\perp = \ker(f^* \circ f)$

D'après I-B-3) $E = \text{Im}(a^{-1} \circ f^* \circ f) \oplus \ker(a^{-1} \circ f^* \circ f)$.

Posons : $x = x_1 + x_2$; avec
$$\begin{cases} x_1 = a^{-1} \circ f^* \circ f(z) \in \text{Im}(a^{-1} \circ f^* \circ f) \\ x_2 \in \ker(a^{-1} \circ f^* \circ f) = \ker(f^* \circ f) = [\text{Im}(f^* \circ f)]^\perp \end{cases}$$

$$\|f(x)\|^2 = \phi_a(x, a^{-1} \circ f^* \circ f(x)) = (x_1 + x_2 \mid f^* \circ f(x_1)) = (x_1 \mid f^* \circ f(x_1)).$$

$$\|f(x)\|^2 = \phi_a(x_1, a^{-1} \circ f^* \circ f(x_1)).$$

D'après I-B-1) $a^{-1} \circ f^* \circ f$ induit un endomorphisme symétrique positif de $\text{Im}(a^{-1} \circ f^* \circ f)$.

Soit ρ' la plus grande valeur propre de la restriction de $a^{-1} \circ f^* \circ f$ à $\text{Im}(a^{-1} \circ f^* \circ f)$.

$$\|f(x)\|^2 = \phi_a(x_1, a^{-1} \circ f^* \circ f(x_1)) \leq \rho' \phi_a(x_1, x_1) = \rho'(a(x_1) \mid x_1). \quad (*)$$

$$0 \leq \rho' \leq \rho \text{ et } (a(x) \mid x) = (a(x_1) \mid x_1) + (a(x_1) \mid x_2) + (a(x_2) \mid x_1) + (a(x_2) \mid x_2).$$

$$(a(x_1) \mid x_2) = (a(x_2) \mid x_1) = (f^* \circ f(z) \mid x_2) = 0$$

$$(a(x) \mid x) = (a(x_1) \mid x_1) + (a(x_2) \mid x_2) \geq (a(x_1) \mid x_1) \geq 0. \quad (**)$$

De (*) et (**) on déduit : $\forall x \in E ; \|f(x)\|^2 \leq \rho(a(x) \mid x)$.

N.B :

Dans la ligne (*) on a utilisé le résultat suivant :

Si V est un espace vectoriel euclidien non nul, et h un endomorphisme symétrique positif de E et ρ la plus grande valeur propre de h , alors : $\forall x \in E ; (h(x) \mid x) \leq \rho \|x\|^2$.

Démontrons ce résultat.

Soit (x_1, \dots, x_n) une base orthonormale de vecteurs propres de h , et ρ_1, \dots, ρ_n les valeurs propres respectivement associées à x_1, \dots, x_n . On suppose $\rho = \rho_n \geq \rho_{n-1} \geq \dots \geq \rho_1 \geq 0$.

$$\text{Soit } x = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x_i \in E. \quad (h(x) \mid x) = \sum_{1 \leq i \leq n} \rho_i \alpha_i^2 \leq \rho \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i^2 = \rho \|x\|^2.$$

Partie II : Minimisation d'une fonctionnelle quadratique

Désormais, $a \in S^{++}(E)$, b un élément fixé de E , et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

J est l'application de E dans \mathbb{R} définie par : $\forall x \in E ; J(x) = \frac{1}{2}(a(x) \mid x) - (b \mid x)$.

II-A - Minimisation théorique

On considère un sous espace vectoriel V de E et on s'intéresse à la minimisation de la restriction de J à V .

II-A-1) Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de a , en considérant une base orthonormale de vecteurs propres de a , on obtient : $(a(x) \mid x) \geq \lambda_1 \|x\|^2$.

Puisque $(b \mid x) \leq \|b\| \cdot \|x\|$ alors : $J(x) = \frac{1}{2}(a(x) \mid x) - (b \mid x) \geq \frac{1}{2}\lambda_1 \|x\|^2 - \|b\| \cdot \|x\|$.

D'où $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty$.

II-A-2) Le cas $V = 0$ est évident, supposons que $V \neq \{0\}$.

Soit $x_0 \in V ; \exists r > 0 ; \forall x \in V ; [\|x\| > r \Rightarrow J(x) > J(x_0)]$.

$x_0 \in \bar{B}_V(0, r)$, où $\bar{B}_V(0, r)$ est la boule fermée de V de centre O et de rayon r .

J est continue sur cette boule qui est compacte, puisque V est de dimension finie.

Alors J est minorée et atteint sa borne inf sur $\bar{B}_V(0, r)$.

$\exists y_0 \in \bar{B}_V(0, r)$ tel que $J(y_0) = \min_{x \in \bar{B}_V(0, r)} J(x) \leq J(x_0)$.

Alors J atteint en y_0 son minimum sur V .

II-A-3) Soit $(x, y) \in V^2$ tel que : $x \neq y$.

$$\text{a) } J\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(a\left(\frac{x+y}{2}\right) \mid \frac{x+y}{2}\right) - \left(b \mid \frac{x+y}{2}\right)$$

$$J\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{8}(a(x) \mid x) + \frac{1}{8}(a(y) \mid y) + \frac{1}{8}(a(x) \mid y) + \frac{1}{8}(a(y) \mid x) - \frac{1}{2}(b \mid x) - \frac{1}{2}(b \mid y).$$

$$J\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}J(x) + \frac{1}{2}J(y) - \frac{1}{8}((a(x) | x) + (a(y) | y) + (a(x+y) | x+y)).$$

On a : $x \neq y$, alors $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, et puisque $a \in S^{++}(E)$ alors $(a(x) | x) > 0$ ou $(a(y) | y) > 0$.

D'où $\frac{1}{8}((a(x) | x) + (a(y) | y) + (a(x+y) | x+y)) > 0$ et $J\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{J(x)+J(y)}{2}$.

b) Par l'absurde, supposons que J atteint son minimum sur V en deux points distincts x, y .

D'après la question précédente : $J\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{J(x)+J(y)}{2} = J(x) = J(y)$. ce qui est absurde.

D'où le point où J atteint son minimum sur V est unique.

II-A-4) Soit $x \in V$ et $(t, h) \in \mathbb{R} \times V$.

$$a) J(x+th) - J(x) = \frac{1}{2}(a(x+th) | x+th) - \frac{1}{2}(a(x) | x) - (b | x+th) + (b | x)$$

Après développement : $J(x+th) - J(x) = \frac{1}{2}(a(h) | h)t^2 + t(a(x) - b | h) = J(th) + t(a(x) | h)$.

b) La restriction de J à V est minimale en x si et seulement si

$$\forall (t, h) \in \mathbb{R} \times V \quad ; \quad J(x+th) - J(x) = \frac{1}{2}(a(h) | h)t^2 + t(a(x) - b | h) \geq 0$$

(i) Si $a(x) - b \in V^\perp$ alors $\forall h \in V \quad ; \quad J(x+h) - J(x) = \frac{1}{2}(a(h) | h) \geq 0$.

(ii) Si $a(x) - b \notin V^\perp$ alors $\exists h \in V$ tel que : $(a(x) - b | h) \neq 0$.

Quitte à changer h par $-h$, on suppose que $(a(x) - b | h) > 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad ; \quad \frac{1}{2}(a(h) | h) + \frac{(a(x)-b|h)}{t} \geq 0 \text{ alors } -\infty = \lim_{t \rightarrow 0; t < 0} \left(\frac{1}{2}(a(h) | h) + \frac{(a(x)-b|h)}{t} \right) \geq 0.$$

Ce qui est absurde. Finalement :

La restriction de J à V est minimale en x si et seulement si $a(x) - b \in V^\perp$.

II-A-5) Ici $n = 3$ et w est l'élément de E en lequel J est minimale.

Pour tout réel $k > J(w)$, on note Σ_k la surface d'équation $J(x) = k$.

Soit π un plan vectoriel inclus dans E tel que $w \notin \pi$.

a) Soit (i_1, i_2, i_3) une base orthonormale de vecteurs propres de a . Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de a respectivement associées aux vecteurs propres i_1, i_2, i_3 .

Pour tout $x \in E$, on pose : $x = x_1i_1 + x_2i_2 + x_3i_3 \in E$.

$$2J(x) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2 - 2b_1x_1 - 2b_2x_2 - 2b_3x_3.$$

$$2\frac{\partial J}{\partial x_j}(w) = 2\lambda_jw_j - 2b_j = 0 \Rightarrow w_j = \frac{b_j}{\lambda_j}.$$

L'équation de Σ_k dans le repère (O, i_1, i_2, i_3) est :

$$\lambda_1(x_1 - w_1)^2 + \lambda_2(x_2 - w_2)^2 + \lambda_3(x_3 - w_3)^2 = 2k + \frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} + \frac{b_3^2}{\lambda_3} = 2k - 2J(w).$$

Σ_k est une ellipse de centre le point Ω tel que $\overrightarrow{O\Omega} = w$.

b) Si π est tangent à Σ_k en un point A , alors A est unique, et si $\overrightarrow{OA} = \alpha_1i_1 + \alpha_2i_2 + \alpha_3i_3$.

Alors $k = \frac{1}{2}(\lambda_1(\alpha_1 - w_1)^2 + \lambda_2(\alpha_2 - w_2)^2 + \lambda_3(\alpha_3 - w_3)^2) + J(w)$. et k est aussi unique.

L'équation de Σ_k dans le repère (Ω, i_1, i_2, i_3) est $\lambda_1X_1^2 + \lambda_2X_2^2 + \lambda_3X_3^2 = 2(k - J(w))$.

Si $A \in \Sigma_k$ tel que : $\overrightarrow{\Omega A} = \eta_1i_1 + \eta_2i_2 + \eta_3i_3$, alors l'équation du plan tangent à Σ_k au point A est : $\lambda_1\eta_1X_1 + \lambda_2\eta_2X_2 + \lambda_3\eta_3X_3 = 2(k - J(w))$.

Soit : $(\pi) \mu_1X_1 + \mu_2X_2 + \mu_3X_3 = \mu$ l'équation du plan π dans ce repère.

On a : $\mu \neq 0$ car le plan π ne passe pas par Ω . Alors :

π est le plan tangent à Σ_k au point A si et seulement si : $\forall j = 1, 2, 3 \quad ; \quad \eta_j = \frac{2\mu_j}{\mu\lambda_j}(k - J(w))$.

On pose alors : $\forall j = 1, 2, 3 \quad ; \quad \eta_j = \frac{2\mu_j}{\mu\lambda_j}(k - J(w))$ et $\overrightarrow{\Omega A} = \eta_1i_1 + \eta_2i_2 + \eta_3i_3$

π est le plan tangent à Σ_k au point A si et seulement si $A \in \Sigma_k$.

π est le plan tangent à Σ_k au point A si et seulement si $4\frac{(k-J(w))^2}{\mu^2} \left(\frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3^2}{\lambda_3} \right) = 2(k - J(w))$.

π est tangent à Σ_k si et seulement si $k = J(w) + \frac{\mu^2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3^2}{\lambda_3}}$.

c) $(\Sigma_k) \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x = k \quad \text{et} \quad (\pi) \quad x + y + z = 0.$

$(\Sigma_k) \quad (x-1)^2 + 2y^2 + 3z^2 = k+1$, alors $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\forall j = 1, 2, 3 \quad ; \quad \lambda_j = 2j$ et $J(w) = -1.$

L'équation de (π) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $X_1 + Y_1 + Z_1 = -1.$ Alors :

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ et $\mu = -1.$ La formule de la question précédente donne :

$$k = J(w) + \frac{\mu^2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3^2}{\lambda_3}} = -1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = -\frac{5}{11}.$$

II-B - Lagrangien augmenté

Soit r un réel positif et L_r est l'application de $E \times F$ dans \mathbb{R} définie par :

$$L_r(x, p) = J(x) + \frac{r}{2} \|f(x)\|^2 + (p \mid f(x)).$$

On dit que (x, p) est un point selle de L_r si, pour tout couple (y, q) de $E \times F,$

$$L_r(x, q) \leq L_r(x, p) \leq L_r(y, p) \text{ c'est à dire : } \begin{cases} L_r(x, \cdot) \text{ est maximale en } p \\ L_r(\cdot, p) \text{ est minimale en } x \end{cases}.$$

II-B-1) Notons dans l'ordre de l'énoncé (i); (ii); (iii) les trois propositions qu'on va montrer équivalentes.

(i) \Rightarrow (ii) Si $L_r(x, \cdot)$ est maximale en p , alors

$$\forall q \in F \quad ; \quad J(x) + \frac{r}{2} \|f(x)\|^2 + (p \mid f(x)) \geq J(x) + \frac{r}{2} \|f(x)\|^2 + (q \mid f(x))$$

$$\forall q \in F \quad ; \quad (p - q \mid f(x)) \geq 0.$$

Mais $\{p - q \ ; \ q \in F\} = F$, alors $\forall q \in F \quad ; \quad (q \mid f(x)) \geq 0.$

$\forall q \in F \quad ; \quad -q \in F$, alors $\forall q \in F \quad ; \quad (q \mid f(x)) = 0.$ donc $f(x) \in F \cap F^\perp = \{0\}$ et $x \in \ker(f).$

(ii) \Rightarrow (iii) Si $x \in \ker(f)$ alors $\forall q \in F \quad ; \quad L_r(x, q) = J(x).$ $L_r(x, \cdot)$ est donc constante sur $F.$

(iii) \Rightarrow (i) Si $L_r(x, \cdot)$ est constante sur F , alors tout $p \in F$ est un maximum de $L_r(x, \cdot)$

II-B-2)

\Leftarrow] Supposons que $(a + rf^* \circ f)(x) + f^*(p) = b.$ Soit $y \in E.$

$$\delta = L_r(x, p) - L_r(y, p) = \frac{1}{2}(a(x) \mid x) + \frac{r}{2}(f^* \circ f(x) \mid x) + (f^*(p) \mid x) - \frac{1}{2}(a(y) \mid y) - \frac{r}{2}(f^* \circ f(y) \mid y) - (f^*(p) \mid y).$$

$$\delta = \frac{1}{2}((a + rf^* \circ f)(x) + f^*(p) - b \mid x) - \frac{1}{2}((a + rf^* \circ f)(y) + f^*(p) - b \mid y) + \frac{1}{2}(b \mid x - y) + \frac{1}{2}(f^*(p) \mid x - y).$$

$$\delta = -\frac{1}{2}((a + rf^* \circ f)(y - x) \mid y) + \frac{1}{2}(b \mid y - x) + \frac{1}{2}(f^*(p) \mid x - y).$$

$$L_r(x, p) - L_r(y, p) = -\frac{1}{2}((a + rf^* \circ f)(y) \mid y).$$

a et $rf^* \circ f$ sont symétriques positifs, alors : $\forall y \in E \quad ; \quad L_r(x, p) \leq L_r(y, p).$

\Rightarrow] Si $L_r(\cdot, p)$ est minimale en x , alors :

$$\forall y \in E \quad ; \quad J(x) + \frac{r}{2} \|f(x)\|^2 + (p \mid f(x)) \leq J(y) + \frac{r}{2} \|f(y)\|^2 + (p \mid f(y)).$$

On pose : $y = x + th$ avec $(t, h) \in \mathbb{R} \times E.$ Un calcul comme celui du premier sens donne :

$$\forall (t, h) \in \mathbb{R} \times E \quad ; \quad t^2((a + rf^* \circ f)(h) \mid h) + 2t((a + rf^* \circ f)(x) + f^*(p) - b \mid h) \geq 0.$$

Un raisonnement comme celui de II-A-4-b) donne :

$$\forall h \in E \quad ; \quad ((a + rf^* \circ f)(x) + f^*(p) - b \mid h) = 0. \text{ D'où } (a + rf^* \circ f)(x) + f^*(p) - b = 0.$$

II-B-3)

$$a) (x, p) \text{ est un point selle de } L_r \Leftrightarrow \begin{cases} L_r(\cdot, p) \text{ est maximale en } p \\ L_r(x, \cdot) \text{ est minimale en } x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \ker(f) \\ a(x) + f^*(p) = b \end{cases}$$

(Conjonction de II-B-1) et II-B-2))

b) Soit $x \in \ker(f)$ et $p \in F$, alors $L_r(x, p) = J(x)$ et $L_r(x, \cdot)$ est maximale en p . (d'après II-B-1))

(i) S'il existe $p \in F$ tel que (x, p) est un point selle de L_r , alors $L_r(\cdot, p)$ est minimale sur E en x , en particulier l'application $[x' \mapsto L_r(x', p) = J(x')]$ est minimale en x sur $\ker(f)$.

(ii) Réciproquement, supposons que la restriction de J à $\ker(f)$ est minimale en x .

D'après (2) $a(x) - b \in \ker(f)^\perp = \text{Im}(f^*)$, alors il existe $p \in F$ tel que : $a(x) + f^*(p) = b$.

D'où d'après la question précédente, (x, p) est un point selle de L_r .

II-B-4) Soit (x, p) un point selle de L_r . Soit $p' \in F$.

a) On a $x \in \ker(f)$, donc : d'après (4)

(x, p') un point selle de L_r si et seulement si $a(x) + f^*(p') = b = a(x) + f^*(p)$ si et seulement si $f^*(p' - p) = 0$ si et seulement si $p' - p$ est un élément de $\ker(f^*) = [\text{Im}(f)]^\perp$.

b) Soit h le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(f)$ et $p' = h(p)$.

$p' - p \in [\text{Im}(f)]^\perp$, alors d'après la question précédente (x, p') est un point selle de L_r .

$\|p\|^2 = \|(p - p') + p'\|^2 = \|p - p'\|^2 + \|p'\|^2$ (Théorème de Pythagore).

$\|p'\| \leq \|p\|$ et on a : $\|p'\| = \|p\| \Leftrightarrow \|p' - p\| = 0 \Leftrightarrow p' = p$.

Si $p'' \in \text{Im}(f)$ tel que (x, p'') est un point selle de L_r , alors $(p' - p'') \in \text{Im}(f) \cap [\text{Im}(f)]^\perp = \{0\}$.

D'où : $p'' = p'$, et Il existe un et un seul point selle (x, p') de L_r tel que $\|p'\|$ est minimale.

Partie III : Algorithmes d'Uzawa et d'Arrow-Hurwicz

On reprend les notations de la partie précédente et on note x l'élément de $\ker(f)$ en le quel la restriction de J à $\ker(f)$ est minimale. (l'existence de x est assurée par la question II-A-3-b))

On note p un élément de F tel que (x, p) est un point selle de L_r .

(L'existence de p est assurée d'après II-B-3-b))

ρ désigne la plus grande valeur propre de $a^{-1} \circ f^* \circ f$.

Soit p_0 fixé dans F et $(\gamma_k)_k$ désigne une suite de réels à valeurs dans $[\alpha, \beta]$ tels que :

$$0 < \alpha < \beta < 2(r + \frac{1}{\rho}).$$

On définit la suite $(x_k)_k$ de E et la suite $(p_k)_k$ de F , comme suit :

$$\forall k \in \mathbb{N} ; L_r(\cdot, p_k) \text{ est minimale en } x_k \text{ et } p_{k+1} = p_k + \gamma_k f(x_k).$$

N.B :

(i) C'est clair que la suite $(p_k)_k$ existe dès que la suite $(x_k)_k$ existe.

(ii) L'existence de la suite $(x_k)_k$ est assurée par (3), puisque $a + rf^* \circ f$ est symétrique définie positive, donc inversible.

III-A

III-A-1) On pose pour tout k de \mathbb{N} , $y_k = x_k - x$ et $r_k = p_k - p$.

a)

$$(i) r_{k+1} = p_{k+1} - p = p_k - p + \gamma_k f(x_k) = r_k + \gamma_k f(x_k - x) = (\text{ car } x \in \ker(f))$$

$$\text{Finalement : } r_{k+1} = r_k + \gamma_k f(y_k).$$

(ii) $L_r(\cdot, p_k)$ est minimale en x_k , alors d'après II-B-2) $(a + rf^* \circ f)(x_k) + f^*(p_k) - b = 0$.

$$(a + rf^* \circ f)(y_k) + f^*(r_k) = b - (a + rf^* \circ f)(x) - f^*(p) = 0.$$

b) $\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = (r_k - r_{k+1} \mid r_k + r_{k+1}) = (-\gamma_k f(y_k) \mid 2r_k + \gamma_k f(y_k))$ (d'après a) (i) ci-dessus)

$$\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = -\gamma_k^2 \|f(y_k)\|^2 - 2\gamma_k (r_k \mid f(y_k)) = -\gamma_k^2 \|f(y_k)\|^2 - 2\gamma_k (f^*(r_k) \mid y_k)$$

$\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = -\gamma_k^2 \|f(y_k)\|^2 - 2\gamma_k(y_k \mid -(a + rf^* \circ f)(y_k))$ (d'après a) (ii) ci-dessus)

$$\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = \gamma_k [2(a(y_k) \mid y_k) + (2r - \gamma_k) \|f(y_k)\|^2].$$

On a : $\gamma_k \geq \alpha$; $2r - \gamma_k \geq 2r - \beta$ car $\gamma_k \in [\alpha, \beta]$; et $(a(y_k) \mid y_k) \geq \frac{1}{\rho} \|f(y_k)\|^2$ (d'après I-C-3)

Finalement : $\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = \gamma_k [2(a(y_k) \mid y_k) + (2r - \gamma_k) \|f(y_k)\|^2] \geq \alpha [2(r + \frac{1}{\rho}) - \beta] \|f(y_k)\|^2$.

c) D'après la question précédente, la suite $(\|r_k\|)_k$ est décroissante, et elle est minorée par 0, alors elle converge, alors d'après l'inégalité de la question précédente, la suite $(f(y_k))_k$ est convergente vers 0.

Donc, puisque $\gamma_k \geq \alpha > 0$, l'inégalité de la question précédente permet de déduire que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a(y_k) \mid y_k) = 0.$$

Soit μ la plus petite valeur propre de a , alors $(a(y_k) \mid y_k) \geq \mu \|y_k\|^2 \geq 0$.

On déduit alors que la suite $(y_k)_k$ converge vers 0, c'est à dire la suite $(x_k)_k$ converge vers x .

III-B

III-B-1) On pose, pour tout entier k , $p_k = \bar{p}_k + \bar{q}_k$ où $(\bar{p}_k, \bar{q}_k) \in \text{Im}(f) \times (\text{Im}(f))^\perp$.

a) D'après II-B-4), \bar{p}_k est l'unique élément de E de norme minimale tel que : (x_k, \bar{p}_k) est un point selle de L_r .

$$\bar{p}_{k+1} + \bar{q}_{k+1} = \bar{p}_k + \bar{q}_k + \gamma_k f(x_k). \text{ D'où } \bar{q}_{k+1} - \bar{q}_k \in \text{Im}(f) \cap (\text{Im}(f))^\perp = \{0\}.$$

Alors la suite $(\bar{q}_k)_k$ est constante.

b) On a montré dans II-A-1-c) que la suite $(y_k)_k$ converge vers 0. alors $(a + rf^* \circ f)(y_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

car $(a + rf^* \circ f)$ est continue, puisque linéaire en dimension finie.

Alors d'après II-A-1)_a)_i) $f^*(r_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, en plus $r_k = p_k - p = \bar{p}_k - \bar{p} + \bar{q}_k - \bar{q}$.

$$\bar{q}_k - \bar{q} \in (\text{Im}(f))^\perp = \ker(f^*). \text{ D'où } f^*(\bar{p}_k - \bar{p}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

c) $(\bar{p}_k - \bar{p})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\text{Im}(f)$ et la suite $(f^*(\bar{p}_k - \bar{p}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, alors d'après I-C-1-c), la suite $(\bar{p}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers \bar{p} .

$$\bar{p}_k + \bar{q}_k = p_k = \bar{p}_k + \bar{q}_0 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{p} + \bar{q}_0. \text{ D'où la suite } (p_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \bar{p} + \bar{q}_0.$$

Désormais, on choisit $p_0 = 0$ et la suite $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ constante égale à γ . Dans ces conditions, la suite $((x_k, p_k))_k$ converge vers (\bar{x}, \bar{p}) point selle de L_r , avec $\|p\|$ minimale.

III-B-2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k on a :

$$x_k = \left([I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f]^k \circ (a + rf^* \circ f)^{-1} \right) (b).$$

Pour $k = 0$, on a : $(a + rf^* \circ f)(x_0) + f^*(p_0) = b$.

$(a + rf^* \circ f)$ est symétrique défini positif, alors inversible.

Donc, puisque $p_0 = 0$, on a : $x_0 = (a + rf^* \circ f)^{-1}(b)$. L'égalité est alors vraie pour $k = 0$.

$$\text{Soit } k \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x_k = \left([I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f]^k \circ (a + rf^* \circ f)^{-1} \right) (b).$$

On a : $(a + rf^* \circ f)(x_{k+1}) + f^*(p_{k+1}) = b = (a + rf^* \circ f)(x_{k+1}) + f^*(p_k + \gamma f(x_k))$.

$$(a + rf^* \circ f)(x_{k+1}) + b + \gamma f^* \circ f(x_k) - (a + rf^* \circ f)(x_k) = b.$$

$$(a + rf^* \circ f)(x_{k+1}) = ((a + rf^* \circ f) - \gamma f^* \circ f)(x_k).$$

$$x_{k+1} = [I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f](x_k).$$

On remplace alors x_k par sa valeur donnée par l'hypothèse de récurrence.

$$x_{k+1} = \left([I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f]^{k+1} \circ (a + rf^* \circ f)^{-1} \right) (b).$$

III-B-3) On suppose que, relativement à la base canonique de E (qui est orthonormale), la matrice de a est diagonale égale à $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$.

On suppose que la matrice de f relativement aux bases canoniques de E et F , admet

pour coefficients génériques : $f_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq m \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$.

a) Les matrices de a et de $f^* \circ f$ dans la base canonique de E sont diagonales, il en est de même pour $G = I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f$. alors G est autoadjoint.

Si $x \in \ker(f)$ alors $G(x) = x$, $\ker(f)$ est stable par G , et $(\ker(f))^\perp$ est stable par $G^* = G$.

b) On note ψ l'endomorphisme induit par $G = I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f$ sur $(\ker(f))^\perp$.

Notons (e_1, \dots, e_m) la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$ et (f_1, \dots, f_m) la base canonique de $F = \mathbb{R}^m$.

$f(e_i) = f_i$ pour $1 \leq i \leq m$ et $f(e_i) = 0$ pour $i > m$.

$(\ker(f))^\perp = \text{vect}(e_1, \dots, e_m)$ et $\forall i \in [[1, m]]$; $f^* \circ f(e_i) = e_i$.

$\forall i \in [[1, m]]$; $\psi(e_i) = e_i - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1}(e_i) = e_i - \frac{\gamma}{\lambda_i + r} e_i = \frac{\lambda_i + r - \gamma}{\lambda_i + r} e_i$.

(e_1, \dots, e_m) est une base orthonormale de vecteurs propres de ψ , alors ψ est autoadjoint,

alors $\|\psi\| = \max_{1 \leq i \leq m} \left| \frac{\lambda_i + r - \gamma}{\lambda_i + r} \right|$. On notera : $\epsilon = \|\psi\|$.

c) r est supposé fixé, $\epsilon = \max_{1 \leq i \leq m} \left| \frac{\lambda_i + r - \gamma}{\lambda_i + r} \right|$.

Soit $\alpha \in]0, 1[$ un réel assez petit, pour avoir $\epsilon \leq \alpha$, il suffit que :

$\forall i \in [[1, m]]$; $-\alpha \leq 1 - \frac{\gamma}{\lambda_i + r} \leq \alpha$

$\forall i \in [[1, m]]$; $(1 + \alpha)(\lambda_i + r) \geq \gamma \geq (1 - \alpha)(\lambda_i + r)$

$(1 + \alpha)(\lambda_m + r) \geq \gamma \geq (1 - \alpha)(\lambda_1 + r)$

On doit en particulier avoir : $(1 + \alpha)(\lambda_m + r) \geq (1 - \alpha)(\lambda_1 + r)$ et $\alpha \geq \frac{\lambda_1 - \lambda_m}{2r + \lambda_1 + \lambda_m}$.

On prend alors $\alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_m}{2r + \lambda_1 + \lambda_m}$ et donc $\gamma = 2 \frac{(\lambda_1 + r)(\lambda_m + r)}{2r + \lambda_1 + \lambda_m}$.

Dans ce cas : $\epsilon = \frac{\lambda_1 - \lambda_m}{2r + \lambda_1 + \lambda_m}$.

N.B :

Cette valeur minimale est donnée par : $\left| 1 - \frac{\gamma}{\lambda_1 + r} \right| = \left| 1 - \frac{\gamma}{\lambda_m + r} \right|$.

d) Plus que r est grande, plus que $\epsilon = \|\psi\|$ est petite, plus que la convergence de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est plus rapide.

en effet :

$\forall k \in \mathbb{N}$; $x_k = \left([I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f]^k \circ (a + rf^* \circ f)^{-1} \right)(b)$.

$[I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f](x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x = [I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f](x)$

$x = [I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f]^k(x)$

$x - x_k = [I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f]^k(x - (a + rf^* \circ f)^{-1}(b))$.

$\|x - x_k\| \leq \epsilon^k \|x - (a + rf^* \circ f)^{-1}(b)\|$.

III-B-4) E (resp F) est toujours muni de sa base canonique $B_n = (e_1, \dots, e_n)$ (resp $B_m = (f_1, \dots, f_m)$).

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i, j \leq n}}$ telle que : $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si non} \end{cases}$ et $b = \sum_{1 \leq i \leq n} e_i$.

Soit $F = (f_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de f dans les bases B_n et B_m .

On prend : $\forall (i, j) \in [[1, m]] \times [[1, n]]$; $f_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = m + 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$.

a) Soit $x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On a B_n est une base orthonormale de E et A est symétrique, alors a est un endomorphisme autoadjoint de E .

$$(a(x) | x) = {}^t X A X = \sum_{1 \leq i \leq n} i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \sum_{2 \leq i \leq n} (i-1) x_i^2 + \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^2 \geq 0.$$

$$(a(x) | x) = 0 \Rightarrow \forall i = 2, \dots, n; x_i = 0 \text{ et } \sum_{1 \leq i \leq n} x_i = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow x = 0.$$

D'où a est un endomorphisme autoadjoint défini positif de E .

b) Posons $B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. d'après III-B-2), $X_0 = (A + r {}^t F F)^{-1} B$.

Encore d'après III-B-2) ; $\forall k \in \mathbb{N} ; X_{k+1} = [I_n - \gamma(A + r {}^t F F)^{-1} {}^t F F]^k X_0$.

Mais on prend $\gamma = 2r$, alors : $I_n - \gamma(A + r {}^t F F)^{-1} {}^t F F = (A + r {}^t F F)^{-1} (A - r {}^t F F)$.

$$X_0 = (A + r {}^t F F)^{-1} B$$

$$\forall k \in \mathbb{N} ; X_{k+1} = (A + r {}^t F F)^{-1} (A - r {}^t F F) X_k.$$

Ce qui donne une procédure pour calculer les termes de la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.