

**Corrigé de l'épreuve d'analyse**

*Propriétés et applications des fonctions analytiques*

**Corrigé par Mohamed TARQI**

**1<sup>ère</sup> Partie : Résultats préliminaires**

1. (a) Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , il existe un seul couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $z = x + iy$ , autrement dit l'application  $\psi$  est bijective, et comme  $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ , on a  $|\psi(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$ , alors  $\psi$  est une isométrie bicontinue.
  - (b) La partie  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + iy \in \Omega\}$  n'est autre que l'image réciproque de l'ouvert  $\Omega$  par l'application continue  $\psi$ , donc est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
  - (c) Il suffit de montrer que  $\Omega^C$ . Soit  $z = x + iy \in \overline{\Omega^C}$ , alors il existe une suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\Omega^C$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n := \operatorname{Re}(z_n) \leq 0$ , ainsi  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 0$ , donc  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$  et par conséquent  $z \in \Omega^C$ , c'est-à-dire  $\Omega^C$  est fermé.  
Pour tout  $z$  et  $z'$  de  $\Omega$ , le segment joignant les points d'affixe  $z$  et  $z'$  reste dans  $\Omega$ , donc  $\Omega$  est convexe et par conséquent connexe par arcs.
2. (a)  $\forall z \in \mathbb{C}$  telle que  $|z| < R$ , on a  $f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots = z^p g(z)$  avec  $g(z) = \sum_{k=p}^{\infty} a_k z^k$ .  
On a évidemment  $g(0) = a_p$ .
  - (b)  $g$  étant continue sur  $D(0, R)$  et non s'annule pas en 0, donc il existe un réel  $r > 0$  tel que  $\forall z \in D(0, r) \ g(z) \neq 0$ , et par suite  $\forall z \in D(0, r) \setminus \{0\}, f(z) = z^p g(z) \neq 0$ .

**2<sup>ème</sup> Partie : La propriété (H)**

1. (a) Il est évident que  $\tilde{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , puisque les dérivées partielles existent et sont continues.  
D'autre part, on a  $\tilde{f}(x, y) = e^{x+iy}$ , donc  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = e^{x+iy}$  et  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i e^{x+iy}$ , et par conséquent :  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$ . Donc  $f$  vérifie la propriété (H).
- (b)  $\tilde{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  comme composé et produit des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
D'autre part  $\forall x > 0, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = \frac{x + iy}{x^2 + y^2}$  et  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = \frac{y + ix}{x^2 + y^2}$ . Donc  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$ , donc  $f$  vérifie la propriété (H).  
Pour tout  $z = x + iy$  de  $\Omega$ , on a  $e^{f(z)} = e^{\ln|z| + i \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right)} = |z| e^{i \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right)}$ . Mais  

$$\cos\left(\arcsin\frac{y}{|z|}\right) + i \sin\left(\arcsin\frac{y}{|z|}\right) = \cos\theta + i \frac{y}{|z|} = e^{i\theta}$$
avec  $\theta = \arcsin\frac{y}{|z|}$ . On a encore  $\cos^2\left(\arcsin\frac{y}{|z|}\right) + \sin^2\left(\arcsin\frac{y}{|z|}\right) = 1$ , donc  

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{|z|}\right)^2} = \frac{x}{|z|},$$
car  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  et par conséquent  

$$e^{f(z)} = |z| e^{i \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right)} = |z| \frac{(x + iy)}{|z|} = z.$$
- (c) Il suffit de vérifier que les applications puissances  $z \mapsto z^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) vérifient (H). D'une part  $\tilde{f}$  est  $\mathcal{C}^1$ , car elle est polynomiale. D'autre part, on a  $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\partial(x+iy)^k}{\partial x}(x,y) = k(x+iy)^{k-1} \text{ et } \frac{\partial(x+iy)^k}{\partial y}(x,y) = ki(x+iy)^k,$$

la propriété est clair si  $k = 0$ . Ainsi  $f$  vérifie la propriété (H) et

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = \sum_{k=1}^d k(x+iy)^{k-1} = P'(z).$$

(d) Non, puisque  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = 1$  et  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = -i$

## 2. Cas d'une fonction définie par une intégrale

(a) On a  $|e^{-t^2+ivt}| = e^{-\operatorname{Re}(z)t^2}$ , donc la fonction  $t \mapsto e^{-zt^2+ivt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

(b) Pour  $x$  fixé dans  $]0, +\infty[$ , posons  $F : y \rightarrow \tilde{f}_v(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)t^2+ivt} dt$  définie sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $g : y \rightarrow e^{-(x+iy)t^2+ivt}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -it^2 e^{-(x+iy)t^2+ivt}$  et  $\forall y \in \mathbb{R}$ , on a  $\left| \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right| = t^2 e^{-xt^2} = \varphi(t)$ , de plus  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale,  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -it^2 e^{-(x+iy)t^2+ivt} dt$ . Autrement dit,  $\tilde{f}_v$  admet une dérivé partielle première par rapport à  $y$  et  $\forall (x,y) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}(x,y) = F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -it^2 e^{-(x+iy)t^2+ivt} dt.$$

(c) Pour  $y$  fixé dans  $\mathbb{R}$ , posons  $F : x \rightarrow \tilde{f}_v(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)t^2+ivt} dt$  définie sur  $]0, +\infty[$ . La fonction  $g : x \rightarrow e^{-(x+iy)t^2+ivt}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -t^2 e^{-(x+iy)t^2+ivt}$  et  $\forall x \in [a,b] \subset ]0, +\infty[$ , on a  $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \right| = t^2 e^{-xt^2} \leq \varphi(t) = t^2 e^{-at^2}$ , de plus  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale,  $F$  est dérivable sur  $[a,b]$  et  $F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -t^2 e^{-(x+iy)t^2+ivt} dt$ . Comme  $a$  et  $b$  sont quelconques, le résultat reste valide sur la réunion des intervalles  $[a,b]$ , donc  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,

$$\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial x}(x,y) = F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -t^2 e^{-(x+iy)t^2+ivt} dt = \frac{1}{i} \frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}(x,y)$$

(d) On peut vérifier que l'application  $(x,y) \mapsto \frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial x}(x,y)$  est continue, ce qui entraîne la continuité de  $(x,y) \mapsto \frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}(x,y)$ , grâce à la dernière relation et on a bien, pour tout  $v$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}(x,y) = i \frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial x}(x,y).$$

Donc la fonction  $\tilde{f}_v$  vérifie la propriété (H).

## 3. Cas de la somme d'une série entière

(a) Pour  $y \in ]-R, R[ (= \mathbb{R})$  si  $R = +\infty$  fixé, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme à la fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+iy)^n$  sur les compacts inclus dans  $] -r, r[$  avec  $r = \sqrt{R^2 - y_0^2}$ . On obtient alors

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+iy)^{n-1}$$

(b) De même, pour  $x \in ]-R, R[ (= \mathbb{R})$  si  $R = +\infty$  fixé, on a :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} i n a_n (x + iy)^{n-1} = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$$

(c) On a  $(x, y) \mapsto \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$  est continue et :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y).$$

Donc la fonction  $\tilde{f}$  vérifie la propriété (H).

#### 4. *Quelques propriétés générales*

(a)  $\lambda \tilde{f} + g$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$ , et pour tout  $(x, y) \in \mathcal{U}$ , on a :

$$\frac{\partial(\lambda \tilde{f} + g)}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \lambda i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = i \frac{\partial(\lambda \tilde{f} + g)}{\partial x}(x, y).$$

Donc  $\lambda \tilde{f} + g$  vérifie la propriété (H).

(b) De même,  $\tilde{f}g$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$ , et on a pour tout  $(x, y) \in \mathcal{U}$  :

$$\frac{\partial(\tilde{f}g)}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y)g(x, y) + \tilde{f}(x, y) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)g(x, y) + \tilde{f}(x, y) i \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = i \frac{\partial(\tilde{f}g)}{\partial x}(x, y)$$

Donc  $\tilde{f}g$  vérifie la propriété (H).

(c)  $\tilde{F} \circ f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$ . Soit  $(x, y) \in \mathcal{U}$ , on a :

$$\frac{\partial(\tilde{F} \circ f)}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \circ \tilde{f}(x, y) \times \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \circ \tilde{f}(x, y) \times i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = i \frac{\partial(\tilde{F} \circ f)}{\partial x}(x, y).$$

Ainsi  $\tilde{F} \circ f$  vérifie la propriété (H) sur  $\mathcal{U}$ .

(d) De même,  $\frac{1}{\tilde{f}}$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$  et on a pour tout  $(x, y) \in \mathcal{U}$  :

$$\frac{\partial(\frac{1}{\tilde{f}})}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y)}{(\tilde{f}(x, y))^2} = \frac{-i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)}{(\tilde{f}(x, y))^2} = i \frac{\partial(\frac{1}{\tilde{f}})}{\partial x}(x, y)$$

Donc  $\frac{1}{\tilde{f}}$  vérifie la propriété (H).

(e) i. On a  $d\tilde{f}(x_0, y_0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0)dy = (a + ib)dx + i(a + ib)dy$ , et

$$A = J_{\tilde{f}}(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = (a + ib, -b + ia) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ii. Si  $a + ib \neq 0$ ,  $A$  représente une similitude de rapport  $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Si  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $A$  représente une rotation vectorielle.

(f) Si  $\tilde{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} = i \frac{\partial(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y})}{\partial x} = i \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y}$$

et

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2} = \frac{\partial(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y})}{\partial y} = \frac{1}{i} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y \partial x} = -i \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y \partial x}$$

mais le théorème de Schwarz montre que  $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y}$ , donc

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2} = 0.$$

3<sup>ème</sup> Partie : Analyticité des applications vérifiant la propriété (H)

1. Puisque  $\Omega$  est un ouvert et  $z_0 \in \Omega$ , alors  $\exists \rho > 0$  tel que  $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ , donc  $\{\rho > 0 / D(z_0, \rho) \subset \Omega\}$  est non vide.
2.  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, R[ \times \mathbb{R}$ , comme composé de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . De plus pour tout couple  $(r, \theta) \in ]0, R[ \times \mathbb{R}$ , on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \sin \theta = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} (\cos \theta + i \sin \theta).$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = r \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} (-\sin \theta + i \cos \theta).$$

On a

$$r \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) - \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) = r \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}.$$

3. (a) Il est clair que  $\varphi_r$  est  $2\pi$ -périodique et  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$\varphi'_r(\theta) = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) = r \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} (-\sin \theta + i \cos \theta).$$

- (b) Puisque l'application  $\varphi_r$  est  $2\pi$ -périodique et  $\mathcal{C}^1$ , alors d'après le théorème de Dirichlet, la série  $c_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(r)| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n}(r)|$  est convergente, c'est-à-dire la suite  $(c_n(r))_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable.

Pour tout  $r \in ]0, R[$ , la fonction  $\varphi_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est  $2\pi$ -périodique, continue, et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , alors, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de  $\varphi_r$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  et a pour somme  $\varphi_r$ .

4. (a)  $\forall n \in \mathbb{Z}$  et  $\forall r \in ]0, R[$ ,  $c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ .
- (b) Soit  $n \in \mathbb{Z}$  fixé. D'après les théorèmes usuels de régularité sous l'intégrale la fonction  $c_n$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, R[$ . Puis par une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} c'_n(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi ir} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi ir} [\varphi(r, \theta) e^{-in\theta}]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi ir} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) (-in) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{n}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{n}{r} c_n(r). \end{aligned}$$

- (c)  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $c_n$  est solution de l'équation différentielle du premier ordre  $ry'(r) - ny(r) = 0$ , ainsi  $c_n(r) = kr^n = c_n(\rho) \rho^n r^n$ , où  $0 < \rho < r$ . Donc  $h_n$  est constante sur  $]0, R[$ .

- (d) Si  $n < 0$ , pour que l'expression  $c_n(r) = kr^n = \frac{c_n(\rho)}{\rho^n} r^n$  ait une limite quand  $r$  tend vers  $0^+$ , il est nécessaire et suffisant que  $c_n(\rho) = 0$ , donc  $c_n = 0$  si  $n \in \mathbb{N}^-$ . Si  $n \geq 0$ , la continuité de  $c_n$  assure la validité de la formule en  $r = 0$ .

5. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z - z_0| < R$ , il existe  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  tels que  $z = z_0 + re^{i\theta}$ . Pour  $r$  fixé, la fonction  $\varphi_r$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , donc la série de Fourier associée à  $\varphi_r$ , à savoir  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(r) e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$  et sa somme vaut  $\varphi_r(\theta) = f(z_0 + re^{i\theta}) = f(z)$ . De plus le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  est supérieur ou égal à  $R$ .

6. D'après le cours, les  $a_n$  sont unique et  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\varphi_r^{(n)}(0)}{n!}$ .

7. L'égalité de Parseval, s'écrit pour  $\varphi_r$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi_r(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(r)|^2,$$

qui s'écrit encore, en tenant compte de  $a_n = 0$  si  $n < 0$  :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

#### 4<sup>ème</sup> Partie : Propriétés fondamentales des applications vérifiant la propriété (H)

##### A. Théorème de Liouville

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $r > 0$ . on a :

$$|c_n(r)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})e^{-in\theta}| d\theta \leq M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|.$$

On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r > 0, |a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ , alors on obtient, quand  $r$  tend vers l'infini et  $n \neq 0$ ,  $a_n = 0$ . Ainsi  $f(z) = a_0$ , donc  $f$  est constante.

2. **Application :**

(a) Posons  $f(x) = |a_d|x^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|x^k$  avec  $x \in \mathbb{R}$ . En utilisant l'inégalité triangulaire, on peut écrire :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |a_d z^d| - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z^k| \leq \left| a_d z^d + \sum_{k=0}^d a_k z^k \right| = |P(z)|.$$

Il clair que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , et comme on a  $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq f(|z|) \lim_{x \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$ , donc  $|P(z)| \sim |a_d||z^d|$  au voisinage de l'infini, et par suite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{P(z)} = 0$ .

Il existe  $r_0 > 0$  tel que  $\forall |z| > r_0$  on a  $\frac{1}{|P(z)|} \leq 1$ .  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z)$  est non nul, donc la fonction

$g : z \mapsto \frac{1}{P(z)}$  est une fraction polynomiale continue sur  $\mathbb{C}$ , en particulier sur le compact  $K = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq r_0\}$ , donc bornée par  $M_0$ .

Sur  $K^c$  la fonction  $g : z \mapsto \frac{1}{P(z)}$  est majorée par 1 et sur  $K$  elle est majorée par  $M_0$ , donc

$g : z \rightarrow \frac{1}{P(z)}$  est majorée sur  $\mathbb{C} = K \cup K^c$  par  $M = \sup\{1, M_0\}$ .

(b) On sait, d'après la question 1.(c) de la deuxième partie, que  $g = \frac{1}{P}$  vérifie la propriété (H) et comme elle est bornée, alors, d'après la question A.1. de cette partie,  $g$  est une constante, ce qui est absurde. *Ainsi tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine dans  $\mathbb{C}$ .*

##### B. Principe du prolongement analytique

1. C'est par définition d'une partie connexe par arcs.

2.  $I$  est une partie non vide, car il contient 0, et est majorée puisque  $I \subset [0, 1]$ , donc  $\sigma = \sup I$  est bien défini.

Supposons  $I = \{0\}$ , alors dans ce cas  $\gamma([0, 1]) \cap D(z_0, \rho) = \{z_0\}$ , ce qui est absurde, car  $\gamma$  est continue.

Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $I$  tel que  $\sigma = \lim_{t \rightarrow +\infty} t_n$  ( d'après la caractérisation de la borne supérieure ), on a  $\forall s \in [0, \sigma[, f(\gamma(s))=0$ , en particulier  $\forall n \in \mathbb{N}, f(\gamma(t_n)) = 0$  et par argument de continuité,  $f(\gamma(\sigma)) = 0$ , donc  $\sigma \in I$ .

3. Soit  $t \in [0, \sigma]$ , alors  $\forall s \in [0, t] \subset [0, \sigma]$ ,  $f(\gamma(s)) = 0$ , donc  $t \in I$ . Ainsi  $[0, \sigma] \subset I$ .  
 Supposons  $\sigma = 1$ , alors dans ce cas  $f(\gamma(1)) = f(z_1) = 0$ , ce qui est impossible.  
 $\sigma = \inf ]\sigma, 1]$ , donc il existe une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $] \sigma, 1]$  telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t_n = \sigma$ , en particulier  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(\gamma(t_n)) \neq 0$ .  
 Si  $\gamma(\sigma) = z_0$ , alors  $\gamma(\sigma) = \gamma(0)$  et donc  $\gamma([0, 1]) \cap D(z_0, \rho) = \{z_0\}$ , ce qui est absurde.
4. (a) Il suffit d'appliquer les résultats de la troisième partie à  $f$  au point  $\gamma(\sigma)$ .  
 (b) Si tous les  $a_n$  sont nuls, alors  $f(z) = 0$  pour tout  $z \in D(\gamma(\sigma), r_1)$ . D'autre part,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n) = \gamma(\sigma)$ , donc il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall k \geq k_0$ , on a  $|\gamma(t_k) - \gamma(\sigma)| < r_1$ , en particulier  $f(\gamma(t_k)) = 0$  pour tout  $k \geq k_0$ , et ceci est impossible, donc les coefficients  $a_n$  ne sont pas tous nuls, et d'après la question 2 de la partie préliminaire, il existe  $r \in ]0, r_1[$  tel que  $f(z) \neq 0$  pour tout  $z \in D(\gamma(\sigma), r) \setminus \{\gamma(\sigma)\}$ .
5. Soit  $\beta = \inf J$  avec  $J = \{t \in [0, \sigma] / \gamma(t) = \gamma(\sigma)\}$ , on vérifie facilement que  $\beta$  est bien définie et appartient à  $J$ . Alors il existe une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\{t \in [0, \sigma] / \gamma(t) = \gamma(\sigma)\}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \beta$ . Si  $\beta = 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t_n) = \gamma(0) = \gamma(\sigma)$ , ceci est impossible, donc  $\beta > 0$ . Autrement dit,  $\gamma([0, 1])$  coupe  $D(\gamma(\sigma), r)$  en d'autre point que  $\gamma(\sigma)$ .  
 En particulier on a  $\forall t \in [0, \sigma]$  :

$$f(\gamma(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\gamma(t) - \gamma(\sigma))^n = 0.$$

Ceci est en contradiction avec la question 4.(b) de cette partie. en conclusion : un tel  $z_1$  n'existe pas, donc  $f$  est nulle sur tout  $\Omega$ .

### C. Applications

#### 1. Principe du maximum :

- (a) On sait qu'il existe  $R > 0$  et une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que  $\forall z \in D(z_0, R)$ ,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ,  
 en particulier  $\forall z \in D(z_0, \rho)$ ,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  et comme elle est bornée sur  $D(z_0, \rho)$ ,  $f$  est constante et vaut  $a_0 = f(z_0)$ .  
 (b) C'est une conséquence immédiate du principe du prolongement analytique.

#### 2. Calcul d'une intégrale :

- (a) i. En reprenant la question 2 de la deuxième partie, on peut montrer que  $\mu$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $\mu'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i t e^{-ut^2 + i v t} dt$ , et comme

$$\frac{\partial (e^{-ut^2 + i v t})}{\partial t} = (i v - 2 u t) e^{-ut^2 + i v t},$$

alors

$$\left[ e^{-ut^2 + i v t} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} (i v - 2 u t) e^{-ut^2 + i v t} dt = i v \mu(v) + i 2 u \mu'(v)$$

et par conséquent :

$$\mu'(v) = \frac{-v}{2u} \mu(v).$$

- ii. On a  $\mu(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ut^2} dt = \frac{1}{u} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\frac{\pi}{u}}$ . (on posant  $r = \sqrt{u}t$ ). La solution de l'équation différentielle  $\mu'(v) = \frac{-v}{2u} \mu(v)$  est  $\mu(v) = \mu(0) e^{\frac{-v^2}{4u}} = \sqrt{\frac{\pi}{u}} e^{\frac{-v^2}{4u}}$ .

- (b) i. Si  $u > 0$ , alors  $f(u) = \ln u$  et donc  $f_v(u) = \mu(v) = \sqrt{\pi} u^{\frac{-f(u)}{2}} e^{\frac{-v^2}{4u}} = \sqrt{\pi} e^{\frac{-f(u)}{2}} e^{\frac{-v^2}{4u}}$ .  
 ii. L'application  $z \mapsto \sqrt{\pi} e^{\frac{-f(z)}{2}} e^{\frac{-v^2}{4z}}$  apparait comme composé et produit des fonctions vérifiant la propriété (H), donc elle même vérifie la propriété (H).

iii. Pour tout  $v \in \mathbb{R}$ , posons  $g(z) = f_v(z) - \sqrt{\pi} e^{-\frac{f(z)}{2}} e^{-\frac{v^2}{4z}}$ .  $g$  vérifie la propriété (H) donc développable en série entière au voisinage de  $z_0 = 1$ , soit  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$  pour  $z \in D(1, R)$ , si  $g$  est non nulle, alors les coefficients  $a_n$  ne sont pas tous nuls, et d'après la question 2. de la première partie  $\exists r \in ]0, R[$  tel que, pour tout  $z \in D(1, r) \setminus \{1\}$ ,  $g(z) \neq 0$ , ce qui est absurde, puisque  $g$  est nulle sur  $D(1, r) \cap \mathbb{R}$ . Ainsi  $g$  est nulle et par conséquent :

$$\forall v \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ut^2 + ivt} dt = \sqrt{\pi} e^{-\frac{f(z)}{2}} e^{-\frac{v^2}{4z}}.$$

•••••

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc  
E-mail : medtarqi@yahoo.fr