

Corrigé de la seconde épreuve de mathématiques

CCP 2007 - Filière MP

I. Description des normes euclidiennes

1.a Si N est une norme euclidienne, associée au produit scalaire φ , et si $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} N(x+y)^2 + N(x-y)^2 &= \varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) \\ &= \varphi(x, x) + 2\varphi(x, y) + \varphi(y, y) + \varphi(x, x) - 2\varphi(x, y) + \varphi(y, y) \\ &= 2(N(x)^2 + N(y)^2) \end{aligned}$$

Avec $x = e_1$ et $y = e_2$, nous avons $\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2)$ donc $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas une norme euclidienne.

1.b $\|\cdot\|_2$ est la norme associée au produit scalaire canonique défini par l'énoncé : c'est donc une norme euclidienne. Supposons maintenant que p est un réel strictement plus grand que 1 et distinct de 2. Toujours avec $x = e_1$ et $y = e_2$, nous avons :

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2^{2/p} + 2^{2/p} \neq 4 = 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2)$$

car $2/p \neq 1$: la norme $\|\cdot\|_p$ n'est donc pas euclidienne.

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ est clairement une forme bilinéaire. Nous avons ensuite :

- pour $x, y \in E$, $\langle x, y \rangle_S = {}^t XSY = {}^t (XSY) = {}^t Y^t SX = {}^t YSX = \langle y, x \rangle_S$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ est symétrique ;
- pour x non nul, $\langle x, x \rangle_S$ est strictement positif car $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ est définie positive.

3. Pour $x, y \in E$, nous avons :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = {}^t XSY$$

et pour X non nul, associé au vecteur x , ${}^t XSX = \varphi(x, x) > 0$ donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II. Quelques généralités et exemples

4. Si $u \in \text{Isom}(N)$ et si $x \in \text{Ker}(u)$, $N(x) = N(u(x)) = N(0) = 0$ donc $x = 0$: u est donc injective et $u \in GL(E)$ (E est de dimension finie).

$\text{Isom}(N)$ est non vide puisqu'il contient l'identité.

Si $u, v \in \text{Isom}(N)$, on a $N(u \circ v(x)) = N(v(x)) = N(x)$ pour tout $x \in E$ et donc $u \circ v \in \text{Isom}(N)$.

Si $u \in \text{Isom}(N)$, on a $N(u^{-1}(x)) = N(u(u^{-1}(x))) = N(x)$ pour tout x , donc $u^{-1} \in \text{Isom}(N)$.

$\text{Isom}(N)$ est donc un sous-groupe de $GL(E)$.

- 5.** Soit $u \in \text{Isom}(N)$. Pour $x \in \Sigma(N)$, $N(u(x)) = N(x) = 1$, donc $u(x) \in \Sigma(N)$: nous avons donc $u(\Sigma(N)) \subset \Sigma(N)$. Comme $u^{-1} \in \text{Isom}(N)$, cela donne également $u^{-1}(\Sigma(N)) \subset \Sigma(N)$, soit $\Sigma(N) \subset u(\Sigma(N))$.

Réciproquement, supposons que $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$ et soit x un élément quelconque de E . Si $x = 0$, on a $N(u(x)) = 0 = N(x)$. Sinon, $y = x/N(x) \in \Sigma(N)$, et donc :

$$N(u(x)) = N(u(N(x)y)) = N(x)N(u(y)) = N(x)$$

car $u(y) \in \Sigma(N)$: u est donc une N -isométrie.

- 6.** $\Sigma(\|\cdot\|_1)$ est le carré \mathcal{C} de sommets $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ et $D = (0, -1)$, qui est conservé par la symétrie s mais pas par la rotation r , puisque $s(A) = D$, $s(B) = C$, $s(C) = B$, $s(D) = A$ et $r(A) = (1/2, \sqrt{3}/2) \notin \mathcal{C}$. s est donc une $\|\cdot\|_1$ -isométrie mais r n'en est pas une.

7.a

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 7.b** Diagonalisons la matrice symétrique S dans une base orthonormale :

$$\begin{aligned} \det(S - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2(4-\lambda) \end{aligned}$$

4 est valeur propre simple, associée au vecteur propre $e_1 - e_3$. Le plan propre associé à la valeur propre 2 est donc le plan orthogonal à ce vecteur. Nous obtenons donc facilement une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de vecteurs propres :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_3), \quad \varepsilon_2 = e_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_3).$$

Nous pouvons donc écrire $P^{-1}SP = D$, i.e. $S = PD^tP$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 7.c** La matrice S est symétrique définie positive (on peut par exemple écrire que ${}^tX SX = {}^tY D Y > 0$ pour $X \neq 0$, avec $Y = {}^tP X$), donc N_q est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$.

- 7.d et e** Dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $\Sigma(N_q)$ a pour équation :

$$4X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 = 1.$$

$\Sigma(N_q)$ est donc un ellipsoïde de révolution, d'axe engendré par le vecteur $e_1 - e_3$.

- 7.f** Toutes les rotations autour de l'axe $\mathbb{R}(e_1 - e_3)$ conservent $\Sigma(N_q)$ et sont donc des N_q -isométries : le groupe $\text{Isom}(N_q)$ est infini.

III. Étude de $\text{Isom}(N)$ lorsque N est une norme euclidienne

8.a Si u est une N_S -isométrie, les formes bilinéaires symétriques $\varphi_1 : (x, y) \mapsto \langle u(x), u(y) \rangle_S$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ sont associées à la même forme quadratique : elles sont donc égales (formules de polarité).

La réciproque est évidente.

8.b $u \in \text{Isom}(N_S)$ si et seulement si ${}^t(AX)S(AY) = {}^tXSY$ pour tous $X, Y \in E$, i.e. si et seulement si ${}^tASA = S$ (on peut identifier grâce aux questions 2 et 3).

9. En particulier, $A \in \text{ISOM}(\|\cdot\|_2) \iff {}^tAA = I_n$, donc $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2) = O_n(\mathbb{R})$. Ce groupe est infini, puisqu'il contient par exemple les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

qui sont deux à deux distinctes pour $\theta \in [0, 2\pi[$.

10.a Si P est dans le noyau de u , P possède $r+1$ racines distinctes et est de degré au plus r : il est donc nul. Ainsi, u est injective, donc surjective ($\mathbb{R}_r[X]$ et \mathbb{R}^{r+1} sont de même dimension finie) : tout vecteur (y_0, y_1, \dots, y_r) de \mathbb{R}^{r+1} possède donc un unique antécédent L .

10.b Soient x_0, x_1, \dots, x_r tels que $x_0 < x_1 < \dots < x_r$ et $\{x_0, x_1, \dots, x_r\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. En appliquant la question précédente avec $y_i = \sqrt{x_i}$ (pour $0 \leq i \leq r$), nous obtenons un polynôme L qui convient.

11.a Comme S est symétrique définie positive, il existe une matrice orthogonale P et des réels $\lambda_i > 0$ tels que

$$S = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) {}^tP$$

Alors la matrice $A = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) {}^tP$ est une racine carrée de S (car ${}^tP = P^{-1}$) et est clairement symétrique définie positive.

11.b Notons $U = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $V = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, et soit $L \in \mathbb{R}[X]$ tel que $L(U) = V$. Nous avons alors :

$$L(B^2) = L(S) = L(PUP^{-1}) = PL(U)P^{-1} = PVP^{-1} = A$$

Le polynôme $Q(X) = L(X^2)$ est donc solution du problème posé.

Nous en déduisons que $AB = X(A)Q(A) = (XQ)(A) = (QX)(A) = Q(A)A = BA$: A et B commutent.

11.c Soient $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $X \in \text{Ker}(S_1 + S_2)$. Alors $S_1X = -S_2X$, et donc $X = 0$ (sinon, on aurait $S_1X > 0$ et $S_2X > 0$). Ainsi, $S_1 + S_2$ est inversible.

11.d Comme A et B commutent, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 = 0$, ce qui donne $A = B$ car $A+B$ est inversible.

12. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et notons $N = \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M \sqrt{S}$. Alors :

$$\begin{aligned} N \in \text{ISOM}(N_S) &\iff {}^tNSN = S \\ &\iff {}^t\left(\sqrt{S}\right) {}^tM {}^t\left(\sqrt{S}\right)^{-1} S \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M \sqrt{S} = S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{S} {}^t M (\sqrt{S})^{-1} (\sqrt{S})^2 (\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S} = (\sqrt{S})^2 \\
&\Leftrightarrow {}^t M M = I_n \\
&\Leftrightarrow M \in O_n(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Comme l'application $M \mapsto (\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S}$ est une bijection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même, nous en déduisons que sa restriction à $O_n(\mathbb{R})$ est une bijection de $O_n(\mathbb{R})$ sur $\text{ISOM}(N_S)$ (c'est même un isomorphisme de groupe).

Ainsi, le groupe des isométries d'une norme euclidienne quelconque N est isomorphe au groupe $O_n(\mathbb{R})$, qui est infini.

Remarque : on obtient ce résultat de façon pratiquement immédiate en utilisant une base orthonormale pour N (deux espaces euclidiens de même dimension n sont isomorphes, donc leurs groupes le sont également).

IV. Étude du cardinal de $\text{Isom}(p)$

13.a Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$. Nous avons $u_{\sigma, \varepsilon}(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ avec $y_{\sigma(i)} = x_i \varepsilon_i$ pour tout i . Nous en déduisons, par changement d'indice :

$$N_p(u_{\sigma, \varepsilon}(x)) = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n |y_{\sigma(i)}|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = N_p(x)$$

donc $u_{\sigma, \varepsilon}$ est une p -isométrie.

13.b $u_{\sigma, \varepsilon}(e_1) = e_3$, $u_{\sigma, \varepsilon}(e_2) = e_4$, $u_{\sigma, \varepsilon}(e_3) = -e_1$ et $u_{\sigma, \varepsilon}(e_4) = e_2$ donc la matrice de $u_{\sigma, \varepsilon}$ dans la base (e_i) est

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

14.a Si a ou b est nul, l'inégalité est évidente. Sinon, la fonction \ln étant convexe sur $]0, +\infty[$ et les masses $1/p$ et $1/q$ étant positives de somme 1, nous avons

$$\ln ab = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \leq \ln \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right)$$

ce qui donne l'inégalité demandée, par croissance de la fonction \ln .

14.b Soient $x, y \in E$. Si x ou y est nul, l'inégalité est une nouvelle fois évidente. Sinon, posons

$$x' = \frac{x}{\|x\|_p} = (x'_1, \dots, x'_n) \text{ et } y' = \frac{y}{\|y\|_q} = (y'_1, \dots, y'_n).$$

Nous avons en utilisant l'inégalité précédente :

$$\frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\|_p \|y\|_q} = |\langle x', y' \rangle| \leq \sum_{i=1}^n |x'_i| |y'_i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} |x'_i|^p + \frac{1}{q} |y'_i|^q = \frac{1}{p} (\|x'\|_p)^p + \frac{1}{q} (\|y'\|_q)^q = 1$$

14.c Quand $p = 2$, nous obtenons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$.

15. Pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\|u(e_j)\|_p = \|e_j\|_p = 1$, i.e. $\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^p = 1$, puis en sommant sur j :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|^p = n.$$

16.a Σ_q est une partie fermée bornée (c'est la sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_q$), elle est donc compacte (E est de dimension finie). Comme l'application $y \mapsto |\langle x, y \rangle|$ est continue, elle est bornée sur Σ_q et atteint ses bornes, d'où l'existence du maximum.

16.b Il suffit d'utiliser l'inégalité de Holdër : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q = \|x\|_p$ pour tout $y \in \Sigma_q$.

Avec le vecteur y_0 donné par l'énoncé, nous avons :

$$\langle x, y_0 \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \underbrace{\varepsilon_i x_i}_{|x_i|} |x_i|^{p-1} \|x\|_p^{1-p} = \|x\|_p^{1-p} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} |x_i|^p = \|x\|_p^{1-p} \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p = \|x\|_p$$

en remarquant que ce résultat est correct même si x est nul !

Si x est non nul, y_0 est élément de Σ_q :

$$(\|y_0\|_q)^q = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} |x_i|^{(p-1)q} (\|x\|_p)^{(1-p)q} = (\|x\|_p)^{-p} \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p = 1$$

et donc $\|x\|_p = |\langle x, y_0 \rangle| \leq \max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle|$.

Si $x = 0$, on choisit $y_0 = e_1$ et on a encore $y_0 \in \Sigma_q$ et $0 = \|x\|_p = |\langle x, y_0 \rangle| \leq \max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle|$.

Nous avons donc démontré que $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle| = \|x\|_p$.

Remarque : ceci traduit que l'application $\varphi : E \longrightarrow E^*$ est une isométrie quand on munit l'espace E de la norme $\|\cdot\|_p$ et l'espace E^* de la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_q$.

17 Remarquons tout d'abord que, par symétrie entre p et q , nous avons également :

$$\forall y \in E, \max_{x \in \Sigma_p} |\langle x, y \rangle| = \|y\|_q.$$

On suppose que u est une p -isométrie. Soit $z \in \Sigma_q$. Nous avons :

$$\forall x \in \Sigma_p, |\langle x, u^*(z) \rangle| = |\langle u(x), z \rangle| \leq \max_{y \in \Sigma_q} |\langle u(x), y \rangle| = \|u(x)\|_p = 1$$

et donc

$$\|u^*(z)\|_q = \max_{x \in \Sigma_p} |\langle x, u^*(z) \rangle| \leq 1 \quad (*)$$

Pour tout $z \in E$, nous avons donc $\|u^*(z)\|_q \leq \|z\|_q$ (l'inégalité est évidente si $z = 0$, et s'obtient en appliquant (*) à $z/\|z\|_q$ si $z \neq 0$).

Comme $u^{-1} \in \text{Isom}(p)$, nous avons ensuite $\|(u^{-1})^*(z)\|_q \leq \|z\|_q$ pour tout $z \in E$. En appliquant cette inégalité à $u^*(z)$, nous obtenons $\|z\|_q \leq \|u^*(z)\|_q$ pour tout $z \in E$, ce qui achève de prouver que u^* est une q -isométrie.

Comme la matrice de u^* dans la base orthonormale (e_i) est la transposée de A , la question 15 donne (il y a toujours symétrie entre p et q) :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{j,i}|^q = n.$$

18.a Nous avons $\sum_{k=1}^r f(\alpha_k) = 0$ en posant $f(x) = x^p - x^q$ (f est définie sur $[0, 1]$, avec par convention $f(0) = 0$).

Comme $p \neq q$ (car $p \neq 2$), f est strictement positive sur $]0, 1[$ si $p < 2$ et strictement négative sur $]0, 1[$ si $p > 2$. La somme des $f(\alpha_k)$ ne peut donc être nulle que si les α_k valent tous 0 ou 1.

18.b Comme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|^p = n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|^q$, nous en déduisons que les $|a_{i,j}|$ ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1.

19 En poursuivant l'analyse, l'égalité $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|^p = n$ avec $|a_{i,j}| = 0$ ou 1 signifie que la matrice A contient n coefficients non nuls (valant 1 ou -1) et $n^2 - n$ coefficients nuls. Comme A est inversible, deux coefficients non nuls ne peuvent se trouver sur une même ligne ou sur une même colonne. On en déduit que u est de la forme $u_{\sigma, \varepsilon}$ pour un certain $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et un certain $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$. Avec la question 13, nous avons donc démontré que le groupe des p -isométries est égal au groupe des permutations signées. Comme l'application $(\sigma, \varepsilon) \mapsto u_{\sigma, \varepsilon}$ est injective, $\text{Isom}(p)$ est un groupe fini contenant $2^n n!$ éléments.