

Concours Communs Polytechniques 2006

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 2

rédigé par Stéphane Legros (stephane.legros@free.fr)

I. Généralités

1.a. Les termes diagonaux de la matrice ${}^tYY = 0$ sont les carrés des normes euclidiennes des vecteurs colonnes de Y : on en déduit que Y est nulle dès que tYY est nulle.

1.b. Si $X \in \text{Ker}({}^tAA)$, on a ${}^tX{}^tAAX = 0$, puis ${}^t(AX)(AX) = 0$, soit $AX = 0$ d'après le a. $\text{Ker}({}^tAA)$ est donc contenu dans $\text{Ker}(A)$.

Comme l'autre inclusion est évidente, ces deux sous-espaces sont égaux et ont même dimension. La formule du rang donne ensuite :

$$\text{rg}({}^tAA) = p - \dim(\text{Ker}({}^tAA)) = p - \dim(\text{Ker}(A)) = \text{rg}(A)$$

en remarquant que tAA et A ont p colonnes.

2. En utilisant la base duale (e_1^*, \dots, e_n^*) , la formule du produit matriciel donne :

$${}^tAA = \left(\sum_{k=1}^n e_k^*(x_i) e_k^*(x_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

soit ${}^tAA = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ puisque la base (e_i) est orthonormale.

La question 1 prouve que $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a même rang que A , i.e. :

$$\text{rg}(G(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

3.a. On en déduit :

(x_1, x_2, \dots, x_n) est liée $\iff \text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_n) < n \iff \text{rg}(G(x_1, x_2, \dots, x_n)) < n \iff \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$
car $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une matrice carrée de taille n .

3.b. En choisissant une base orthonormale de E et en reprenant la matrice A de la question 2, nous avons :

$$\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det({}^tAA) = (\det(A))^2 \geq 0.$$

Le résultat du **a** prouve que la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre si et seulement si $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$.

4. Nous avons directement :

$$0 \leq \Gamma(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \gamma \\ \cos \alpha & 1 & \cos \beta \\ \cos \gamma & \cos \beta & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma$$

d'où l'inégalité demandée.

Il y a une petite erreur d'énoncé: il faut lire "sur un même grand cercle" au lieu de "sur un même cercle" (trois points de la sphère sont toujours sur un même cercle). Quand les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O , les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et \overrightarrow{OC} sont liés et $\Gamma(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 0$, soit :

$$1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

5.a. Nous avons directement :

$$\begin{aligned} \Gamma(a+b, y) &= \begin{vmatrix} (a+b | a+b) & (a+b | y) \\ (y | a+b) & (y | y) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (a | a) + (b | b) & (b | y) \\ 0 + (y | b) & (y | y) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (a | a) & (b | y) \\ 0 & (y | y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (b | b) & (b | y) \\ (b | y) & (y | y) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (a | a) & 0 \\ 0 & (y | y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (b | b) & (b | y) \\ (b | y) & (y | y) \end{vmatrix} \\ &= \Gamma(a, y) + \Gamma(b, y) \end{aligned}$$

la troisième égalité découlant de la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne.

5.b. En posant $a = x - z$ et $b = z$, nous avons bien $x - z \perp z$ et $x - z \perp y$: l'égalité précédente donne $\Gamma(x, y) = \Gamma(x - z, y) + \Gamma(z, y) = \Gamma(x - z, y)$ (y et z sont liés).

5.c. En notant $x = \overrightarrow{AB}$ et $y = \overrightarrow{AC}$, les deux vecteurs x et y sont indépendants (car A, B et C ne sont pas alignés). En notant z le projeté orthogonal de x sur la droite engendrée par y et H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de B , nous avons :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \frac{1}{2} \sqrt{\Gamma(x, y)} = \frac{1}{2} \sqrt{\Gamma(x - z, y)} = \frac{\|x - z\| \|y\|}{2} = \frac{BH \times AC}{2}$$

qui est bien l'aire du triangle ABC .

6.a. Quand le parallélépipède est rectangle, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$. On en déduit :

$$\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})} = AB \times AC \times AD$$

qui est bien le volume du parallélépipède rectangle.

6.b. La question n'a aucun intérêt, d'autant que la valeur absolue du déterminant de la matrice A dont les colonnes sont les composantes dans la base canonique des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et \overrightarrow{AD} donne plus rapidement le volume cherché (c'est le calcul classique du volume du parallélépipède, le déterminant de A apparaissant comme Jacobien d'un changement de variable). L'auteur attend peut-être quelque chose du genre :

- on calcule le déterminant de Gram des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et \overrightarrow{AD} , que l'on stocke dans une variable $Gamma$;
- si $Gamma$ est nul, on affiche "Les points sont alignés" ; sinon, on renvoie la racine carrée de $Gamma$.

6.c. Je ne vois pas comment un élève pourrait programmer rapidement cette procédure sur sa machine. Avec Maple (par exemple), on peut écrire:

```
> ps := proc(u,v)
  local i;
  add(u[i]*v[i],i=1..nops(u))
end:

> Gram := proc()
  local n,A,i,j;
  n := nargs();
  A := matrix(n,n);
  for i to n do for j to n do
    A[i,j] := ps(args[i],args[j])
  od: od:
  linalg[det](A)
end:

> Volume := proc(A,B,C,D)
  local Gamma;
  Gamma := Gram(B-A,C-A,D-A);
  if Gamma=0 then print('Les points sont coplanaires.') else sqrt(Gamma) fi;
end:

> Volume([1,2,0],[1,-1,3],[-1,-2,0],[3,-1,0]);
42

> Volume([1,-1,2],[3,4,-7],[0,3,0],[0,2,1]);
  Les points sont coplanaires.

> Volume([8,0,3/2],[0,1,-1],[-1/2,2,0],[3,3,0]);
  43
  2
```

II. Points équidistants sur une sphère euclidienne

7.a. Si (x_1, x_2, \dots, x_m) est solution du problème $P(m, t)$, nous avons pour i, j distincts:

$$\|x_i - x_j\| = \sqrt{\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2(x_i | x_j)} = \sqrt{2(1-t)}$$

qui est bien une constante (ceci prouve en passant que $t \leq 1$).

7.b. La matrice J est de rang 1, donc 0 est valeur propre d'ordre au moins égal à $m-1$ (l'ordre d'une valeur propre est au moins égal à la dimension de l'espace propre associé). La trace de J valant m , on en déduit que la m -ème valeur propre est égale à m , ce qui donne le polynôme caractéristique $\chi_J(X) = (-1)^m X^{m-1}(X-m)$.

7.c. Si (x_1, \dots, x_m) est solution du problème $P(m, t)$, nous avons:

$$\Gamma(x_1, \dots, x_m) = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t \\ t & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \\ t & \dots & t & 1 \end{vmatrix}$$

Si $t \neq 0$, nous pouvons écrire :

$$\Gamma(x_1, \dots, x_m) = t^m \det(J - (1 - 1/t)I_m) = t^m \chi_J(1 - 1/t) = (1 - t)^{m-1} (1 - (m - 1)t)$$

et si $t = 0$, $\Gamma(x_1, \dots, x_m) = 1$ et la relation précédente est encore valable.

8.a. Si (x_1, \dots, x_m) est une famille libre solution du problème $P(m, t)$, nous avons :

- $m \leq \dim(E) = n$;
- $|t| = |(x_1 | x_2)| \leq \|x_1\| \|x_2\| = 1$ donc $t \in [-1, 1[$;
- $\Gamma(x_1, \dots, x_m) > 0$, soit $\underbrace{(1 - t)^{m-1}}_{>0} (1 + (m - 1)t) > 0$, ou encore $t > -\frac{1}{m - 1}$.

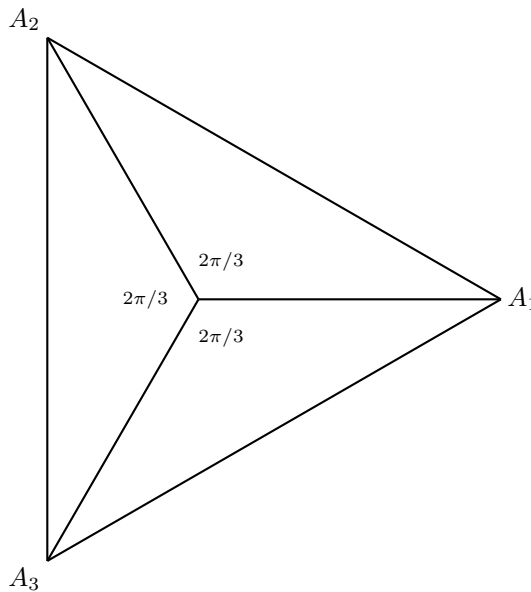
On a donc bien $-\frac{1}{m - 1} < t < 1$ et $m \leq n$.

8.b. Si (x_1, \dots, x_m) est une famille liée solution du problème $P(m, t)$, $\Gamma(x_1, \dots, x_m) = 0$ et $t = -\frac{1}{m - 1}$.

Comme, (x_1, \dots, x_{m-1}) est solution de $P(m - 1, t)$, $\Gamma(x_1, \dots, x_{m-1}) = (1 - t)^{m-2} (1 + (m - 2)t) \neq 0$: cela prouve que (x_1, \dots, x_{m-1}) est une famille libre, puis que $m - 1 \leq \dim(E)$, i.e. $m \leq n + 1$.

8.c. Si une telle famille (y_1, \dots, y_5) existait, l'angle constant étant noté α , les vecteurs y_i seraient tous non nuls (l'angle n'est défini que pour des vecteurs non nuls) et la famille $(y_1/\|y_1\|, \dots, y_5/\|y_5\|)$ serait solution du problème $P(5, t)$ avec $t = \cos \alpha$: ceci contredit les questions a. et b. (on devrait avoir $5 \leq 4$). Il y a sans doute une erreur dans l'énoncé, puisque l'hypothèse $\pi/2 < \alpha < \pi$ n'est pas utilisée. On peut penser qu'il faut remplacer "cinq points" par "quatre points", mais la question est alors identique à la question 10.a, mais en plus difficile puisque l'on est en dimension 3.

9. La question est mal posée : m semble quelconque, puis on demande de préciser "le" couple (m, t) . Ce qui vient d'être fait démontre que l'on doit nécessairement choisir $m = 3$ et $t = -1/2$. En choisissant A_1, A_2 et A_3 sur le cercle ce centre O et de rayon 1 et formant un triangle équilatéral, nous avons clairement $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3})$ solution de $P(3, -1/2)$.



10.a. Il suffit d'appliquer la question précédente à l'espace H : il existe trois points B_1, B_2 et B_3 tel que les vecteurs $y_i = \overrightarrow{OB_i}$ soient une solution de $P(3, -1/2)$.

10.b. Pour i compris entre 1 et 3, $\|x_i\|^2 = a^2\|y_i\|^2 + b^2\|u\|^2 + 2ab(y_i | u) = a^2 + b^2 = \frac{2-2t}{3} + \frac{2t+1}{3} = 1$.

Enfin, pour i et j distincts :

$$(x_i | x_j) = a^2 (y_i | y_j) + \underbrace{ab(y_i | u)}_{=0} + \underbrace{ab(y_j | u)}_{=0} + b^2 = \frac{2-2t}{3} \times \frac{-1}{2} + \frac{2t+1}{3} = t$$

ce qui prouve que (x_1, x_2, x_3) est solution de $P(3, t)$. Comme $t \neq -1/2$, cette famille est libre (contraposée de la question 8.b).

10.c. Supposons que trois tels points existent. Les vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$ forment alors une solution du problème $P(3, t)$ avec $t = \cos \alpha$. Deux cas sont alors possibles :

- si les vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$ sont indépendants, $-1/2 < t < 1$ et $0 < \alpha < 2\pi/3$;
- sinon, $t = -1/2$ et $\alpha = 2\pi/3$.

Nous en déduisons que $0 < \alpha \leq 2\pi/3$.

Réciproquement, si $\alpha \in]0, 2\pi/3[$, nous venons de démontrer l'existence de (x_1, x_2, x_3) unitaires tels que $(x_i | x_j) = \cos \alpha$ pour $i \neq j$: les points A_i tels que $\overrightarrow{OA_i} = x_i$ sont donc sur la sphère unité et les angles géométriques des couples $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})$, $(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3})$ et $(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_1})$ sont égaux à α .

Si $\alpha = 2\pi/3$, il suffit de choisir trois points A_1, A_2 et A_3 sur la sphère formant un triangle équilatéral de centre O pour avoir une solution au problème posé.

Nous avons donc démontré qu'il existe trois points distincts A_1, A_2 et A_3 sur la sphère de centre O et de rayon 1 tels que les angles géométriques des couples $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})$, $(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3})$ et $(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_1})$ soient tous égaux à α si et seulement si $0 < \alpha \leq 2\pi/3$.

III. Théorèmes d'Appoloni

11. Comme $G(a_1, \dots, a_n)$ et $G(b_1, \dots, b_n)$ sont les matrices du produit scalaire $(|)$ dans les bases (a_i) et (b_i) , la formule de changement de base donne :

$$G(b_1, \dots, b_n) = {}^t P G(a_1, \dots, a_n) P = P^{-1} G(a_1, \dots, a_n) P$$

(P est orthogonale car (a_i) et (b_i) sont deux bases orthonormales pour le même produit scalaire).

Les matrices $G(a_1, \dots, a_n)$ et $G(b_1, \dots, b_n)$ étant semblables, elles ont en particulier même trace, soit :

$$\sum_{i=1}^n (a_i | a_i) = \sum_{i=1}^n (b_i | b_i).$$

12.a. On vérifie facilement que \langle , \rangle est une forme bilinéaire symétrique définie positive : \mathcal{C} est le cercle unité pour ce produit scalaire.

12.b. ae_1 et be_2 sont des diamètres conjugués particuliers de \mathcal{C} .

12.c. \mathcal{C} admet une équation implicite de la forme $f(x, y) = 0$ avec f de classe C^1 . Pour $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, nous avons :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = 2 \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right) \neq (0, 0)$$

car $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Le point (x_0, y_0) est ainsi un point régulier de \mathcal{C} , qui admet donc une tangente en ce point, d'équation : $\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$, qui s'écrit encore $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

La droite D a donc pour équation : $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 0$, qui s'écrit bien $\langle \overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM} \rangle = 0$.

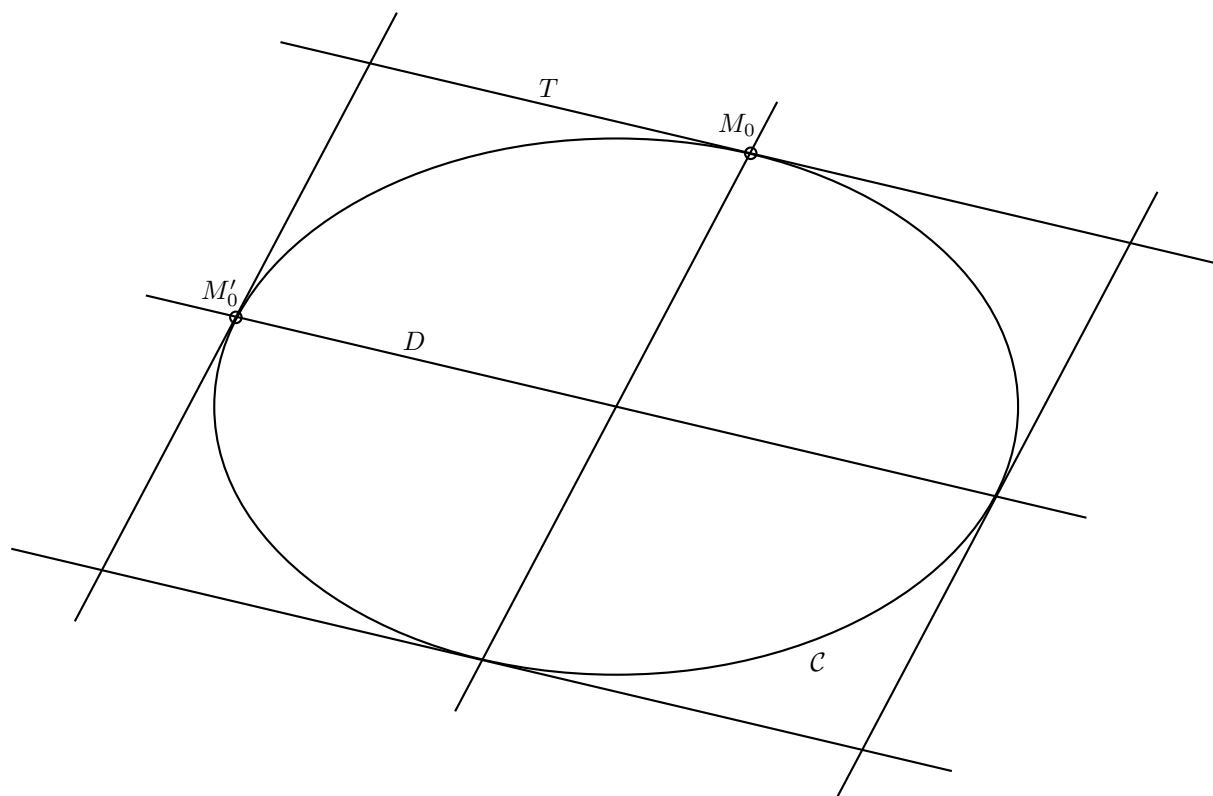
Remarque : ces calculs traduisent simplement que la tangente à un cercle en un point M_0 est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OM_0}$.

En choisissant $M'_0 \in D \cap \mathcal{C}$, nous avons :

- $\overrightarrow{OM_0} \perp \overrightarrow{OM'_0}$ pour \langle , \rangle ;
- $\langle \overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_0} \rangle = 1$ car $M_0 \in \mathcal{C}$;
- $\langle \overrightarrow{OM'_0}, \overrightarrow{OM'_0} \rangle = 1$ car $M'_0 \in \mathcal{C}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM'_0}$ sont donc des diamètres conjugués de \mathcal{C} .

Ces propriétés conduisent au schéma suivant :



12.d. Les bases $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et (ae_1, be_2) étant orthonormales pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la question 11 donne :

$$OM^2 + OM'^2 = \|ae_1\|^2 + \|be_2\|^2 = a^2 + b^2.$$

D'autre part, l'aire A du parallélogramme formé par O , M et M' vaut :

$$A^2 = \Gamma(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \det(G(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})) = \det(P^{-1}G(ae_1, be_2)P) = \det(G(ae_1, be_2)) = a^2b^2$$

ce qui prouve que l'aire du parallélogramme "formé par O , M et M' " est constante, égale à ab .

IV. Recherche d'une isométrie affine

Comme les familles (x_i) et (y_i) ont même matrice de Gram, elles ont même rang p . D'autre part, on peut, quitte à réordonner les vecteurs, supposer que (x_1, \dots, x_p) est libre. Comme $G(y_1, \dots, y_p) = G(x_1, \dots, x_p)$, la famille (y_1, \dots, y_p) est également libre : la construction donnée par l'énoncé est donc justifiée.

13.a. Nous avons :

- $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}$, $(u(x_i) | u(x_j)) = (y_i | y_j) = (x_i | x_j)$;
- $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\forall j \in \{p+1, \dots, n\}$, $(u(x_i) | u(e_j)) = (y_i | e'_j) = 0 = (x_i | e_j)$;
- $\forall i, j \in \{p+1, \dots, n\}$, $(u(e_i) | u(e_j)) = (e'_i | e'_j) = \delta_{i,j} = (e_i | e_j)$.

Comme $(x_1, \dots, x_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E , nous en déduisons que u conserve le produit scalaire.

13.b. Soit $i \in \{p+1, \dots, n\}$ et posons $x_i = \sum_{j=1}^p \alpha_j x_j$. Alors :

- $y_i - u(x_i) = y_i - \sum_{j=1}^p \alpha_j y_j \in W$;

- pour tout k compris entre 1 et p :

$$(y_k | y_i - u(x_i)) = (y_k | y_i) - (u(x_k) | u(x_i)) = (y_k | y_i) - (x_k | x_i) = 0$$

$$\text{donc } y_i - u(x_i) \in \{y_1, \dots, y_p\}^\perp = W^\perp.$$

13.c. Comme $W \cap W^\perp = \{0\}$, $u(x_i)$ est également égal à y_i pour i compris entre $p+1$ et n : il existe donc $u \in L(E)$ tel que $u(x_i) = y_i$ pour tout i et $u \in O(E)$ d'après le a. On peut remarquer que la condition $G(x_1, \dots, x_n) = G(y_1, \dots, y_n)$ est nécessaire pour qu'un tel u existe. La question 13 a donc permis de démontrer le résultat :

Si E est un espace euclidien et si (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) sont deux familles de vecteurs de E (on peut remarquer que n peut être différent de la dimension de E), il existe $u \in O(E)$ qui envoie (x_1, \dots, x_n) sur (y_1, \dots, y_n) si et seulement si $G(x_1, \dots, x_n) = G(y_1, \dots, y_n)$.

14.a. L'égalité de polarité $(u | v) = \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2)$ donne, pour i, j compris entre 1 et n :

$$\begin{aligned} (x_i | x_j) &= \left(\overrightarrow{A_1 A_i} \mid \overrightarrow{A_1 A_j} \right) = \frac{1}{2} (\|A_1 A_i\|^2 + \|A_1 A_j\|^2 - \|A_j A_i\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|B_1 B_i\|^2 + \|B_1 B_j\|^2 - \|B_j B_i\|^2) = \left(\overrightarrow{B_1 B_i} \mid \overrightarrow{B_1 B_j} \right) = (y_i | y_j) \end{aligned}$$

14.b. D'après la question 13, il existe $u \in O(E_n)$ tel que $u(x_i) = y_i$ pour tout i . Soit alors f l'application affine de E_n dans lui-même définie par $f(A_1) = B_1$ et $\vec{f} = u$. Nous avons donc :

$$\forall M \in E_n, f(M) = B_1 + u(\overrightarrow{A_1 M}).$$

Comme $u \in O(E_n)$, $f \in Is(E_n)$ et pour tout i , $f(A_i) = B_1 + u(\overrightarrow{A_1 A_i}) = B_1 + \overrightarrow{B_1 B_i} = B_i$: le résultat demandé est donc démontré.