

# Centrale 2006 mp maths 2

## 1 Une fonction polynomiale

**I A 1)** Il vient  $L_1(x) = -2x^3 + 3x^2$ ,  $L_2(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$ .

**I A 2)** 
$$\int_0^x t^m(1-t)^m dt + \int_0^{1-x} t^m(1-t)^m dt = \int_0^x t^m(1-t)^m dt + \int_x^1 (1-u)^m u^m du = \int_0^1 t^m(1-t)^m dt$$

On en déduit la relation  $L_m(x) + L_m(1-x) = 1$ .

En particulier on a toujours  $L_m(1/2) = 1$ .

Le point admis par l'énoncé n'est pas difficile à vérifier, on trouverait que le coefficient de  $x^{m+k+1}$  dans  $L_m$  est au signe près  $\binom{m+k}{m} \binom{2m+1}{m-k} \in \mathbb{N}$ .

**I B 1)** On a  $I_m \times L'_m(x) = x^m(1-x)^m > 0$  quand  $x \in ]0, 1[$ . Donc  $L_m$  est strictement croissante (sa dérivée ne s'annule qu'en 0 et 1). 0 est donc son unique racine, sa multiplicité est  $m+1$  (puisque racine d'ordre  $m$  de la dérivée).

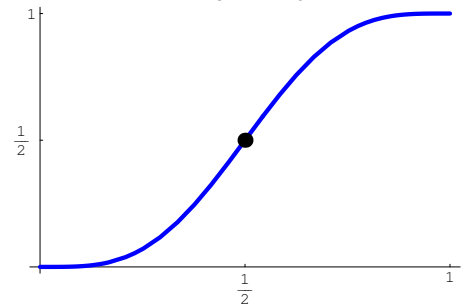
Il vient  $I_m \times L''_m(x) = x^{m-1}(1-x)^{m-1}m(1-2x) > 0$  entre 0 et  $1/2$ .

On nous demande d'étudier  $L_m(x)/x$  : posons  $\varphi(x) = I_m \times L_m(x)$  alors

$$x^2\varphi'(x) = xL'_m(x) - L_m(x) = \psi(x) \quad \psi'(x) = xL''_m(x) > 0$$

et on a donc  $\psi(x) > 0$  pour  $0 < x \leq 1/2$  puisque  $\psi(0) = 0$ ; on en tire la croissance de  $\varphi$ .

Graphe de  $L_3$

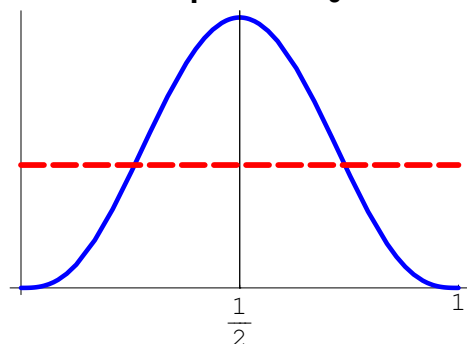


**I B 3)** La relation du **I A2)** donne une symétrie centrale autour de  $(1/2, 1/2)$  : la fonction  $L_m$  est convexe entre 0 et  $1/2$ , elle est concave entre  $1/2$  et 1. La tangente est horizontale en 0 et en 1. Voici le graphe de  $L_3$  :

**I C 1)** On a vu que  $L'_m$  est strictement croissante sur  $[0, 1/2]$  et que  $L'_m(x) = L'_m(1-x)$ ; donc l'équation a pour solution  $x = y$  ou  $x + y = 1$  (par symétrie).

**I C 2)** Il devient utile d'esquisser le graphe de  $L'_m$ . Il ne peut clairement pas y avoir plus de deux points distincts donnant la même valeur  $> 0$  pour  $L'_m$ . Donc la seule solution avec trois points distincts serait  $(0, 1/2, 1)$ . Mais elle ne vérifie pas la condition  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ . On est donc conduit à examiner les solutions de la forme  $(\alpha = \beta, \gamma = 1 - \alpha)$  (et permutations) ce qui imposerait  $2\alpha + (1 - \alpha) = 1$ , impossible sauf si  $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$ . Il reste seulement la solution triviale  $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$ .

Graphe de  $L'_3$



**I C 3)** Idem pour 4 points : la condition sur la somme donne la solution  $\forall i \alpha_i = 1/4$  en plus des solutions extrêmes  $\exists i \alpha_i = 1$  et  $\forall j \neq i \alpha_j = 0$ .

## 2 Polynômes de Taylor

**II A)** L'application  $T_{n,a}$  est linéaire et idempotente, comme on le voit particulièrement bien si on écrit un polynôme  $P$  quelconque dans la base des  $(X - a)^p$  :

$$T_{n,a}\left(\sum \alpha_k (X - a)^k\right) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (X - a)^k$$

Son noyau est précisément engendré par une partie de cette base, les  $((X - a)^p)_{p > n}$  (et son image  $\mathbb{R}_n[X]$  est engendrée par le reste de la base,  $((X - a)^p)_{0 \leq p \leq n}$  : cette base est **adaptée** au projecteur, même si la notion n'est pas au programme en dimension infinie). Ce noyau est l'idéal engendré par  $(X - a)^{n+1}$ .

**II B)** Le point crucial, vu en I, est que 0 est racine d'ordre  $m + 1$  de  $L_m$ . Par ailleurs  $L_m(1 - X) = 1 - L_m(X)$  : donc  $\boxed{T_{m,0}(U) = \mathbb{R}}$ .

Au voisinage de 1, on a 1 qui est racine d'ordre  $m + 1$  de  $L_m(1 - X)$  et donc  $L_m(X) = 1 + o((1 - X)^m)$  ce qui permet d'écrire  $\boxed{T_{m,1}(U) = \mathbb{S}}$ .

**II B)** Ce qu'on vient de prouver est que  $\Phi \circ \Phi = \Phi$ , puisque les polynômes de Taylor de  $\Phi(P)$  ne sont autres que  $P_0$  et  $P_1$  d'après la question précédente. Par ailleurs  $\Phi$  s'écrit comme une combinaison d'applications linéaires (notamment les projecteurs  $P \mapsto P_i, i = 0, 1$ ) et donc est linéaire. Finalement  $\boxed{\Phi \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}_n[X]}$ .

Comme  $P_0, P_1$  décrivent  $\mathbb{R}_m[X]$  entier, l'image de  $\Phi$  est  $\mathbb{R}_m[X]L_m(1 - X) + \mathbb{R}_m[X]L_m(X)$ . Notez qu'à ce stade on écrit « + », et pas encore  $\oplus$ .

Il est clair que si  $P_0 = P_1 = 0$  alors  $\Phi(P) = 0$ . Montrons la réciproque : si  $\Phi(P) = 0$  alors au voisinage de 0 le polynôme de Taylor de  $\Phi(P)$  doit être un  $o(X^m)$ . Or ce polynôme de Taylor est  $P_0$  comme démontré au II.B : donc  $P_0 = 0$  (le polynôme nul). De même en 1. Finalement

$\boxed{\text{Ker } \Phi \text{ est l'ensemble des polynômes qui admettent 0 et 1 comme racines de multiplicité } > m}$ .

On peut caractériser  $\text{Ker } \Phi$  comme l'idéal engendré par  $L_{m+1}(X)$  ou  $X^{m+1}(1 - X)^{m+1}$ , ce qui permet d'en donner une base, en multipliant ce polynôme par des  $X^k, k \leq n - 2m - 2$ . Sa dimension est donc  $n - 2m - 1$ . L'autre espace propre du projecteur  $\Phi$ , qui est son image, est donc de dimension  $2m + 2$  (théorème du rang, car  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$ ). Ceci signifie que la famille génératrice (cf. supra) des  $(X^k L_m(1 - X) + X^p L_m(X))_{0 \leq k, p \leq m}$ , qui est de cardinal précisément  $2m + 2$ , est une base de  $\text{Im } \Phi$ .

## 3 Raccorder

**I A 1)** Cela rappelle fort les propriétés de polynômes  $L_m$ . Il suffit de poser

$$Q_1(X) = L_1\left(\frac{X+1}{2}\right) = \frac{2 + 3X - X^3}{4}$$

pour changer en  $\pm 1$  les extrémités de l'intervalle utilisé.

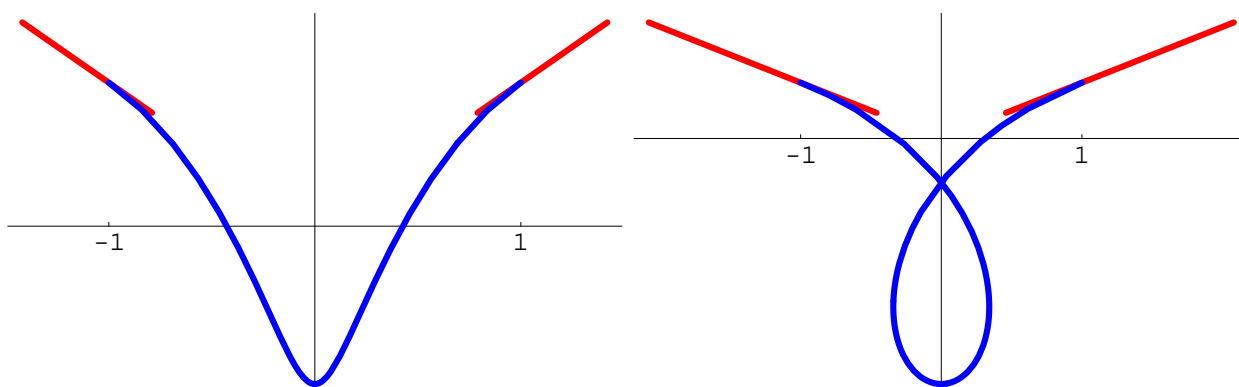
Une **autre** solution,  $V$ , serait telle que  $Q - 1 - V$  (de degré  $\leq 3$ ) admette  $-1$  et  $1$  comme racines de multiplicité au moins 2. Cela ferait déjà 4 racines, trop vu le degré : donc forcément  $V = Q_1$  et on a démontré existence et unicité.

**II A 2)** On peut proposer  $Q_2(X) = L_2\left(\frac{X+1}{2}\right) = \frac{8 + 15X - 10X^3 + 3X^5}{4}$  (non demandé).

Au changement de bornes près, on retrouve la problématique du **II B** : on construit des fonctions dont les polynômes de Taylor (à un certain ordre) sont **donnés** aux extrémités de l'intervalle. Ainsi  $x_3$  admet le même DL que  $x_1$  (resp. que  $x_2$ ) en  $-1$  (resp.  $1$ ) : ce qui prouve bien que la fonction  $g$  obtenue par recollement est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**III C)** On regroupe ici les trois sous-questions en une seule. Les deux graphes sont des demi-droites. La fonction de raccord est

$$g(t) = \left\{ \frac{1}{2} (at^3 - t^3 - at + 3t), \frac{1}{2} (-at^4 + 3at^2 - 2a + 2) \right\}$$



L'intersection avec l'axe des ordonnées correspond aux racines de l'abscisse de  $g_3$  [comprises entre  $-1$  et  $1$ ]. On étudie les variations de  $\varphi(t) = at^3 - t^3 - at + 3t = (a-1)t^3 + t(3-a)$ .

Alors (en prenant  $t \neq 1$ )  $\varphi'(t) = 3(a-1)t^2 + (3-a)$  change de signe quand  $t = \pm \sqrt{\frac{a-3}{3(a-1)}}$  ce qui n'a de sens que pour  $a > 3$ . Les valeurs de  $\varphi$  en ces deux points sont opposées, donc la courbe (cubique) de  $\varphi$  a trois racines [on peut aussi les calculer sans ambages].

Il se trouve que  $y$  ne prend que deux valeurs différentes pour ces trois valeurs de  $t$  ( $0$  et  $\pm \sqrt{\frac{a-3}{a-1}}$ ) qui annulent  $x$ , à savoir  $1-a$  et  $\frac{1-3a}{(a-1)^2}$ , comme on le voit sur la figure non demandée ci-dessus ( $a = 2,4$  puis  $a = 4$ ).

## 4 Animation

On utilise une propriété capitale des espaces et applications affines : **une application affine est déterminée par l'image d'un repère affine.**

**IV A1)** Notons qu'une base de  $\mathbb{R}^3$  est donnée par les vecteurs  $\overrightarrow{M_4M_i}, i = 1, 2, 3$ . Utilisons cette remarque par un calcul : on cherche  $u_i, \dots, h_i$  comme les solutions d'un système de quatre équations,  $u_i x_j + v_i y_j + w_i z_j + h_i = \delta_i^j, j = 1 \dots 4$ . Le déterminant de ce système est, par manipulations élémentaires

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}$$

et ce déterminant est celui de trois vecteurs indépendants  $\overrightarrow{M_4M_i}, i = 1, 2, 3$  donc est non nul par hypothèse.

*NB : on a démontré ici quelque chose d'évident : il existe des équations des plans définis par les trois faces, normalisées de telle sorte que la face  $(A_1A_2A_3)$  ait pour équation  $g_4 = 0$  et qu'on ait  $g_4(A_4) = 1$ .*

**IV A2)** Une question plus facile avec des dépassements de programme... Le rang de cette famille est 3 (maximal). En effet,

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \vdots & & & \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & \dots & & \\ w_1 & \dots & & \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix} = I_4 \Rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & \dots & & \\ w_1 & \dots & & \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix} = 4$$

Par manipulations élémentaires (car la notion de bordant est rigoureusement interdite) on en déduit que la sous-matrice  $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$  est inversible aussi.

Mais ceci signifie que  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , dont ce sont les coordonnées, forme une famille libre. Donc le rang de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  est  $\geq 3$  et comme ce sont des formes dans  $\mathbb{R}^3$  ce n'est y pas plus. Cela signifie qu'il existe **une** équation (non triviale) entre les  $\varphi_i$ . C'est la clef de la délicate question d'extrema ci-dessous, et cela aurait mérité quelques questions intermédiaires.

**IV B1)** On a  $g_j(A_i) = \delta_j^i$  et donc  $g(A_i) = 1$ .  $g$  est une application affine, constante sur un repère : c'est l'application constante 1.

Observons de même que  $G_j(A_i) = L_m(\delta_j^i) = \delta_j^i$  et  $G = 1$  itou en chaque sommet du tétraèdre. Mais  $G$  n'est pas affine, donc cela ne se généralise pas à  $\mathcal{E}$  entier.

**IV B2)**

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad \Psi(M) = \frac{\sum_{i=1}^4 g_i(M)A_i}{\sum_{i=1}^4 g_i(M)} = \sum_{i=1}^4 g_i(M)A_i = M,$$

car cette fonction est affine et donne bien  $\Psi(A_j) = A_j$ , donc  $\Psi = \text{Id}$ .

Cela signifie que les  $g_i$  sont des **coordonnées barycentriques** de  $M$  par rapport aux  $A_j$  (notion hors-programme).

En particulier on observe pour  $M$  à l'origine que

$$g_i(O) = h_i \quad 1 = \sum_{i=1}^4 h_i \quad O = \sum_{i=1}^4 h_i A_i \quad \text{et en général } g_i(M) - g_i(O) = \varphi_i(M)$$

On en déduit un résultat capital quoique non demandé :  $\sum_{i=1}^4 \varphi_i = 0$ , puisque cela est vrai pour tous les  $A_j$ .

**IV B3)** On nous demande en fait de vérifier que la fonction  $G$  est constante sur les 6 arêtes du tétraèdre. Forcément on aura alors  $\alpha = G(A_i) = 1$  (cf. supra).

Considérons l'arête  $[A_1, A_2]$  par exemple : un point de ce segment s'écrira  $M = \lambda A_1 + (1-\lambda)A_2$  où  $\lambda \in [0, 1]$ . Il vient alors (les applications affines conservent le barycentre)

$$g_i(M) = \lambda g_i(A_1) + (1-\lambda)g_i(A_2) = \lambda \delta_1^i + (1-\lambda)\delta_2^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin \{1, 2\} \\ \lambda & \text{si } i = 1 \\ 1-\lambda & \text{si } i = 2 \end{cases}$$

Dans tous les cas on a  $G(M) = L_m(0) + L_m(0) + L_m(\lambda) + L_m(1-\lambda) = 1$  d'après **I A2)**.

**IV C1)** On peut montrer par le critère fermé+borné que  $\Delta$  est compact (c'est le parallélépipède circonscrit au tétraèdre). Il est plus rapide, quoique non intuitif, de constater que  $\Delta$  est l'image par l'application continue  $(\gamma_1 \dots \gamma_4) \mapsto \sum \gamma_i A_i$  du compact (produit de compacts)  $[0, 1]^4$ .

**V C2)** Suivons l'indication : une face est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de ses trois sommets (disons  $A_i, i = 1...3$ ), c'est donc l'image du compact  $K = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^3 \mid \alpha + \beta + \gamma = 1\}$  par l'application  $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3$  et c'est aussi un compact, sur lequel l'application continue  $G$  est bornée et atteint ses bornes. Reste à savoir où.

Pour cela on fait appel au calcul différentiel. On sait ce qui se passe sur le bord d'une face (car on est alors sur une arête), reste à étudier l'intérieur. Si on considère  $\alpha$  et  $\beta$  comme les variables (puisque  $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ ), personne n'étant nul, on étudie

$$G_i(M) = L_m(\alpha g_i(A_1) + \beta g_i(A_2) + (1 - \alpha - \beta)g_i(A_3))$$

Deux, voire trois, des termes de cette somme sont nuls selon la valeur de  $i$ . En additionnant, il reste dans tous les cas de figure

$$G(M) = L_m(\alpha) + L_m(\beta) + L_m(\gamma) = L_m(\alpha) + L_m(\beta) + L_m(1 - \alpha - \beta)$$

Par calcul du gradient (par rapport aux variables  $(\alpha, \beta)$ ), on trouve que les points critiques doivent vérifier la condition du **I C2)**. Comme on a exclu que  $\alpha\beta\gamma = 0$ , cela nous donne  $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$ . La valeur afférente est plus petite que 1 (voir le graphe de  $L_m$  : par convexité on a  $L_m(1/3) < 1/3$ ) et donc ce point critique donne le minimum, le maximum étant 1 et atteint sur les arêtes.

Le minimum de  $G$  sur une face est atteint en son isobarycentre, il vaut  $3L_m(1/3)$

le maximum de  $G$  vaut 1

**V C3)** Les  $g_i$  sont égaux en  $\Omega$  à  $g_i(\Omega) = \frac{1}{4} \sum_j g_i(A_j) = \frac{1}{4}$ . D'où  $G(\Omega) = 4L_m(1/4)$ .

Le calcul général ci-dessous donne en  $\Omega$

$$\nabla G(\Omega) = L'_m(1/4) \left( \sum_{i=1}^4 u_i, \sum_{i=1}^4 v_i, \sum_{i=1}^4 w_i \right) = 0$$

en tenant compte du résultat (non demandé) de la question **IV B2)**, où l'on a découvert la relation  $\sum \varphi_i = 0$ .

Donc Ω est un point critique.

**V C4)** On a  $\frac{\partial g_i(M(x, y, z))}{\partial x} = u_i$  et de même pour les autres dérivées partielles ; on en déduit que l'expression générale du gradient de  $G$  au point  $M$  est

$$\nabla G(M) = \left( \sum_{i=1}^4 u_i L'_m(g_i(M)), \sum_{i=1}^4 v_i L'_m(g_i(M)), \sum_{i=1}^4 w_i L'_m(g_i(M)) \right)$$

Supposons cela égal à 0 : on a donc les équations  $\sum_{i=1}^4 u_i L'_m(g_i(M)) = 0$  et *simile*. On peut l'exprimer matriciellement :

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L'_m(g_1(M)) \\ L'_m(g_2(M)) \\ L'_m(g_3(M)) \\ L'_m(g_4(M)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

autrement dit,  $\sum_{i=1}^4 L'_m(g_i(M)) \varphi_i = 0$  : c'est une relation entre les  $\varphi_i$ , on a établi au **IV A4)** qu'il n'y en a qu'une (à constante près), à savoir  $\sum \varphi_i = 0$ .

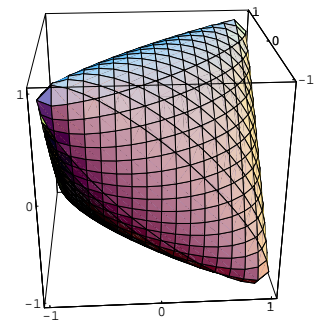
Donc tous les  $L'_m(g_i(M))$  sont égaux. Par ailleurs on a exclu qu'un des  $g_i(M)$  puisse être nul, puisque les faces ont été traitées à part. Par application directe du **I C5)** on a donc que l'unique point critique, hors les faces, est  $\Omega$ .

**V C5)** Résumons : le maximum absolu est atteint sur les arêtes et vaut  $G_{\max} = 1$ . Le minimum absolu est atteint en l'isobarycentre  $\Omega$ , et  $G_{\min} = 4L_m(1/4)$ .

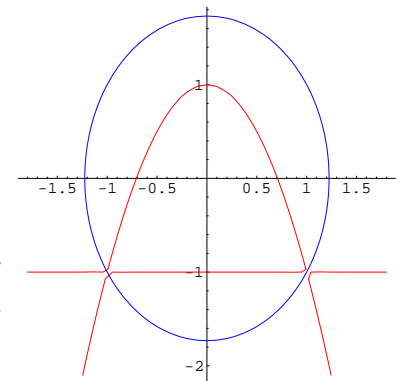
**V D1)** On calcule  $\nabla G = \frac{3}{8}(2x - 2yz, 2y - 2xz, -2xy + 2z)$ . La nullité de ceci donne les sommets du tétraèdre (comme  $(-1, -1, 1)$ ) et son centre, O, qui sont les 5 points critiques. Seuls les quatre sommets appartiennent à  $\Sigma$ ; ce sont les points non réguliers de  $\Sigma$ .

**V D2)** Étudions sur le segment en posant  $f(t) = 8G(ta, tb, tc) = 9t^2 - 6t^3 abc + 5$  compte tenu de ce que  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ .  $f'(t)$  s'annule bien sûr en 0, et aussi en  $t_0 = 1/(abc)$ , où l'on a donc un maximum (local). Mais cela n'advient que pour  $M_0 = (\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab})$  qui est en dehors de la boule ouverte, d'après le résultat admis par l'énoncé : en effet  $OM^2 = \frac{3}{(abc)^2} \geq 3$ . En résumé G croît quand on s'éloigne du centre jusqu'à rencontrer la sphère (et sans doute même au delà), de la valeur  $G(0) = 5/9$  à  $\frac{1}{8}(9 - 6abc + 5) \geq \frac{9}{8} > 1$  : donc dans toute direction il existe un t (et un seul) pour lequel la valeur G(1) est atteinte.

On peut visualiser que notre surface se projette, à partir du centre, sur la sphère (elle y est homéomorphe, mais passons).



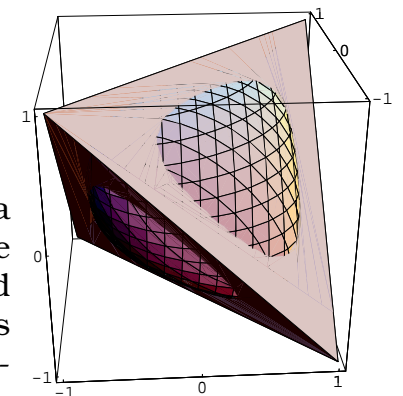
**V D3)** Cela signifie que  $\Sigma'$  est « dans » la sphère, avec un point pour chaque segment issu de O. En revanche le tétraèdre est inclus dans  $\Sigma'$  – ses arêtes en font carrément partie comme on l'a établi au C et ses autres points donnent une valeur de G inférieure à 1. Cela se voit bien sur une figure tracée par ordinateur :



**V D4)** On pose alors  $y = -x$  et on est ramené à l'équation

$$\frac{1}{8}(6zx^2 + 6x^2 + 3z^2 + 5) = 1 \iff \frac{3}{8}(z+1)(2x^2) + z - 1 = 0$$

ce qui donne la réunion d'une droite,  $z = -1$ , et d'une parabole. Par ailleurs, l'intersection de ce plan et de la sphère est un cercle (cela ne saute pas aux yeux sur l'équation en coordonnées non orthonormales) :  $2x^2 + z^2 = 3$ . En réunissant on trouve la figure ci-jointe.



**V D5)** Pour la valeur minimale (non demandée mais c'est 0,625) la surface est réduite au seul point  $\Omega = O$ ; ensuite la surface  $\Sigma'$  grossit<sup>1</sup> et elle vient contenir le tétraèdre exactement quand  $G = G_{\max} = 1$ . Il y a une plage intermédiaire où  $\Sigma'$  coupe les **faces** du tétraèdre, sans en toucher les bords : cf. figure ci-joint pour  $G = 0,85$ .