

CONCOURS CENTRALE SUPELEC MATHS 2 2004  
CORRIGÉ POUR LE CONTRÔLE A POSTERIORI

I. A.  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  est un anneau car il contient  $-I_2$  et est stable pour  $+$  et  $\times$ .

I.B.1) Dans un anneau, l'ensemble des éléments inversibles est toujours un groupe multiplicatif.

I.B.2) Si  $A$  et  $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ,  $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$  donc  $D = \det(A)$  divise 1 et  $|D| = 1$ ; la réciproque se voit par la formule 
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

I.C.1)  $SL_2(\mathbb{Z})$  est un groupe car il contient  $I_2$  et  $(A, B \in SL_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow AB^{-1} \in SL_2(\mathbb{Z}))$ .

I.C.2) et 3) 
$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} 3d - 5c = 1 \\ 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3(d-2) = 5(c-1) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} c = 1 + 3k \\ d = 2 + 5k \end{cases}$$
  

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \setminus SL_2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} 3d - 5c = -1 \\ 3 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow 3(d-3) = 5(c-2) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} c = 2 + 3k \\ d = 3 + 5k \end{cases}$$

I.C.4)  $\exists (c, d) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow PGCD(a, b) = 1$  : c'est exactement le théorème de Bézout.

I.D.1) et 2)  $T$  est non diagonalisable quel que soit le corps car elle possède 1 pour valeur propre double et le sous-espace propre correspondant n'est pas de dimension 2; elle est trigonalisable puisque triangulaire...

$S$  possède deux valeurs propres non réelles  $i$  et  $-i$ , elle est donc diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , mais non trigonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ; une forme réduite est  $D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$  et la matrice de passage  $P$ , telle que  $S = PDP^{-1}$ , est  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$

$TS = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  a pour polynôme caractéristique  $X^2 - X + 1$ ; ayant deux racines non réelles  $-j$  et  $-\bar{j}$ ,  $TS$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  mais non trigonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ; une forme réduite est  $E = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & -\bar{j} \end{bmatrix}$  et la matrice de passage  $Q$ , telle que  $TS = QEQ^{-1}$ , est  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\bar{j} & -j \end{bmatrix}$ .

I.E.1) et 2) Si  $A^2 = I_2$ ,  $A$  est une matrice de symétrie, donc semblable à  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  ou  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ; la dernière forme est impossible car le déterminant vaut -1, donc  $A = \pm I_2$ ; la réciproque est facile.

I.F.1) si  $A^2 = -I$ , le polynôme scindé à racines simples  $(X-i)(X+i)$  est annulateur de  $A$  donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et donc semblable à  $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$  ou  $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ ; la seule forme où le déterminant est 1 est la troisième, et l'on constate qu'alors la trace de  $A$  est nulle.

I.F.2) D'après ce qui précède,

$$\left\{ \begin{array}{l} A^2 = -I_2 \\ A \in SL_2(\mathbb{Z}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{Z} / A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \text{ avec } a^2 + bc = -1$$

I.G.1) Exercice classique : on écrit  $PU = VP$  avec  $P = R + iS \in GL_2(\mathbb{C})$ , et on montre qu'il existe  $\lambda$  réel tel que  $Q = R + \lambda S \in GL_2(\mathbb{R})$ , d'où  $QU = VQ$  et  $U$  et  $V$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

I.G.2) Si  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  est solution de  $A^2 = -I_2$ , on vu qu'elle était semblable à  $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ , comme  $S$ , donc  $A$  et  $S$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ; elle le sont donc aussi dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par ce qui précède.

II. A. 1)  $\Lambda$  contient 0 et est stable par soustraction : c'est donc un groupe additif. Ce peut-être un anneau (par exemple pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = i$ , mais pas forcément, par exemple pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = \pi$  (en effet  $\pi^2$  ne peut s'écrire  $u + v\pi$  avec  $u$  et  $v$  entier car  $\pi$  n'est pas algébrique).

II. A. 2) Remarquons déjà que  $\text{Im} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) \neq 0$  car sinon  $(\alpha, \beta)$  serait  $\mathbb{R}$ -liée. Si  $\text{Im} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) < 0$ , on change  $\beta$  en  $-\beta$  : le réseau engendré est identique : on peut donc toujours supposer  $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathcal{H}$ .

$$\text{II. A. 3) } \text{Im} \left( \frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{1}{2i} \left( \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right) = \frac{1}{2i} \left( \frac{(ad - bc)(z - \bar{z})}{|cz + d|^2} \right) = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \text{Im}(z).$$

II. B. 1)  $\Lambda$  est engendré par  $\mathcal{B} = (\omega_1, \omega_2)$  et par  $\mathcal{B}' = (\omega'_1, \omega'_2)$  avec  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  et  $\frac{\omega'_1}{\omega'_2} \in \mathcal{H}$ . il existe donc 8 entiers  $a, b, c, d, e, f, g, h$  tels que  $\begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix}$  ; mais  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}$  sont les matrices de passage respectives de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  et de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ , donc sont inverses l'une de l'autre ;  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  appartient donc à  $GL_2(\mathbb{Z})$  ; de plus  $\text{Im} \left( \frac{\omega'_1}{\omega'_2} \right) = \frac{ad - bc}{\left| c\frac{\omega_1}{\omega_2} + d \right|^2} \text{Im} \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)$ , donc  $ad - bc > 0$  et  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  appartient à  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

II. B. 2) On montre facilement la réciproque en prouvant que les réseaux engendrés par  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont inclus l'un dans l'autre.

II. C. C'est le même problème que I. C. 3)

II. D. Si  $\Lambda_\tau = \Lambda_{\tau'}$ , il existe  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  telle que  $\begin{cases} \tau' = a\tau + b \\ 1 = c\tau + d \end{cases}$ , or  $\tau$  est non réel donc  $c = 0$  et  $d = 1$  ; de  $ad - bc = 1$  on tire  $a = 1$  : donc  $\tau' = \tau + b$  ; réciproquement, on montre facilement que pour tout  $b$  entier  $\Lambda_\tau = \Lambda_{\tau+b}$ .

III. A. 1) Par II. A. 2), on sait qu'un réseau  $\Lambda$  est engendré par  $(\alpha, \beta)$  avec  $\tau = \frac{\alpha}{\beta} \in \mathcal{H}$  ; il est clair que  $\Lambda = \beta\Lambda_\tau$ , donc  $\Lambda$  est semblable à  $\Lambda_\tau$ .

III. A. 2) Si  $\Lambda_\tau$  et  $\Lambda_{\tau'}$  sont semblables,  $\Lambda_{\tau'} = \lambda\Lambda_\tau$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et il existe  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  telle que  $\begin{bmatrix} \tau' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\tau \\ \lambda \end{bmatrix}$  ; on en déduit  $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$  ; la réciproque se montre en remontant les calculs, en utilisant II. B. 2).  
REM : ceci fait le lien avec la partie IV.

III. B. 1) L'ensemble  $S(\Lambda)$  est l'ensemble des coefficients  $a$  des similitudes directes de centre 0 :  $z \mapsto az$  laissant stable le réseau  $\Lambda$  (plus le nombre 0, car l'application nulle n'est pas une similitude).

III. B. 2) Si  $\lambda$  est le rapport d'une homothétie de centre 0 laissant stable le réseau  $\Lambda$  de base  $(\alpha, \beta)$ ,  $\lambda\alpha = u\alpha + v\beta$  avec  $u$  et  $v$  entiers donc  $\lambda = u$  et  $\lambda$  est entier ; réciproquement, il est clair que si  $\lambda$  est entier,  $\lambda\Lambda \subset \Lambda$  ; nous avons montré que  $S(\Lambda) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$ .

III. B. 3)  $S(\Lambda)$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$  ; en effet  $-1 \in S(\Lambda)$ , (car  $-\Lambda = \Lambda$ ) et si  $z, z' \in S(\Lambda)$ ,

$$(z + z')\Lambda \subset z\Lambda + z'\Lambda \subset \Lambda + \Lambda \subset \Lambda$$

et

$$(zz')\Lambda = z(z'\Lambda) \subset z\Lambda \subset \Lambda$$

donc  $z + z'$  et  $zz' \in \Lambda$ .

III. B. 4)  $S(\Lambda_{\mathcal{B}}) = S(\Lambda_\tau)$  car

$$z\Lambda_{\mathcal{B}} \subset \Lambda_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow z\omega_2\Lambda_\tau \subset \omega_2\Lambda_\tau \Leftrightarrow z\Lambda_\tau \subset \Lambda_\tau$$

III. B. 5) Si  $z \in S(\Lambda_t)$ , comme  $1 \in \Lambda_\tau$ ,  $z = z \times 1 \in \Lambda_t$ , donc  $S(\Lambda_t) \subset \Lambda_t$ .

III. C. 1) Soit  $z$  un élément non entier de  $S(\Lambda_t)$ ; comme  $z$  et  $\tau z$  appartiennent à  $\Lambda_\tau$ , il existe 4 entiers  $a, b, c, d$  tels que  $z = a\tau + b$  et  $\tau z = c\tau + d$ , donc  $\tau(a\tau + b) = c\tau + d$ , et  $a\tau^2 + (b - c)\tau - d = 0$ ;  $z$  n'étant pas entier,  $a$  est non nul et  $\tau$  est racine d'un polynôme du second degré à coefficients entiers.

III. C. 2) a) On suppose que  $\tau$  vérifie  $u\tau^2 + v\tau + w = 0$  avec  $u, v, w$  entiers,  $u \neq 0$ ; alors  $(u\tau + v)\tau = -w$  appartient à  $\Lambda_\tau$  donc  $z = u\tau + v$  appartient à  $S(\Lambda_\tau)$ ;  $u$  étant non nul,  $z$  n'est pas réel, donc  $S(\Lambda_\tau)$  n'est pas contenu dans  $\mathbb{R}$ .

III. C. 2) b) Si  $u = 1$ ,  $\tau + v$  appartient à  $S(\Lambda_t)$ , donc  $\tau$  également ainsi que tout  $a\tau + b$  avec  $a$  et  $b$  entiers:  $\Lambda_t$  est donc inclus dans  $S(\Lambda_t)$  et lui est donc égal par III. B. 5).

REM:  $\Lambda_\tau$  est donc dans ce cas un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ .

IV. A. 1)  $\text{Im}(g(z)) = \frac{1}{|cz + d|^2} \text{Im}(z)$ , donc  $\text{Im}(z) > 0 \Rightarrow \text{Im}(g(z)) > 0$  et  $g(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ .

IV. A. 2) On montre par un calcul simple que  $(\Phi(A) \circ \Phi(A'))(z) = \Phi(AA')(z)$ .  $\Gamma$  est donc stable pour la loi  $\circ$ .

IV. A. 3)  $\Phi(A) \circ \Phi(A^{-1}) = \Phi(I_2) = id_{\mathcal{H}}$  donc  $\Phi(A)$  est bijective et  $(\Phi(A))^{-1} = \Phi(A^{-1})$ .  $\Phi$  est donc un morphisme du groupe  $SL_2(\mathbb{Z})$  dans le groupe de bijections de  $\mathcal{H}$ , et son image  $\Gamma$  est donc un groupe.

IV. A. 4)

$$\begin{aligned} \Phi(A) = id_{\mathcal{H}} &\Leftrightarrow \forall z \in \mathcal{H} \quad z = \frac{az + b}{cz + d} \Leftrightarrow \forall z \in \mathcal{H} \quad cz^2 + dz = az + b \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = a \\ b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = c = 0 \\ a = d = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = \pm I_2 \end{aligned}$$

IV. A. 5)

a)  $\Phi(A) = \Phi(A') \Leftrightarrow \Phi(AA'^{-1}) = id_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow AA'^{-1} = \pm I_2 \Leftrightarrow \boxed{A' = \pm A}$ .

b)  $ST = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  et  $TS = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  donc  $ST \neq \pm TS$  d'où  $\Phi(S) \circ \Phi(T) \neq \Phi(T) \circ \Phi(S)$  et  $\Gamma$  n'est pas commutatif.

IV. B. 1) L'équation demandée est une traduction de  $|z - \omega|^2 = R^2$ ;  $\mathcal{C}(\omega, R) \subset \mathcal{H} \Leftrightarrow R < \text{Im } \omega$ .

IV. B. 2) On a  $s(z) = s^{-1}(z) = -\frac{1}{z}$ ; donc

$$z \in s(\mathcal{C}(\omega, R)) \Leftrightarrow -\frac{1}{z} \in \mathcal{C}(\omega, R) \Leftrightarrow |z|^2 + \frac{\bar{\omega}z + \omega z}{|\omega|^2 - R^2} + \frac{|\omega|^2}{(|\omega|^2 - R^2)^2} = \frac{R^2}{(|\omega|^2 - R^2)^2}$$

$$\text{donc } s(\mathcal{C}(\omega, R)) = \mathcal{C}\left(-\frac{\bar{\omega}}{|\omega|^2 - R^2}, \frac{R}{|\omega|^2 - R^2}\right)$$

IV. C. 1) On a  $z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \text{Im } z = \beta$ , d'où

$$z = x + iy \in s(\mathcal{D}) \Leftrightarrow s^{-1}(z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \text{Im}\left(-\frac{1}{z}\right) = \beta \Leftrightarrow \frac{y}{x^2 + y^2} = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{1}{2\beta}\right)^2 = \frac{1}{(2\beta)^2} \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } s(\mathcal{D}) = \mathcal{C}\left(\frac{i}{2\beta}, \frac{1}{2\beta}\right) \setminus \{0\}$$

IV. C. 2) On a  $z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z = \alpha \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$ , d'où

$$z = x + iy \in s(\mathcal{D}) \Leftrightarrow s^{-1}(z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \left( -\frac{1}{z} \right) = \alpha \\ \operatorname{Im} \left( -\frac{1}{z} \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} = -\alpha \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left( x + \frac{1}{2\alpha} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{(2\alpha)^2} \text{ si } \alpha \neq 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

donc  $s(\mathcal{D}) = \mathcal{C} \left( -\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\alpha} \right) \cap \mathcal{H}$  si  $\alpha \neq 0$ , la demi-droite  $Oy$  sinon.

IV. D)  $\mathcal{F}$  est la portion de bande verticale fermée de largeur 1 centrée sur  $Oy$  limitée inférieurement par le cercle trigonométrique ; comme  $t(z) = z + 1$ ,  $t(\mathcal{F})$  et  $t^{-1}(\mathcal{F})$  sont des translatés de  $\mathcal{F}$  d'une unité vers la droite et vers la gauche.

IV. E. 1) Toute partie bornée, contient un nombre fini de noeuds du réseau  $\Lambda_\tau$  (par exemple parce qu'on peut placer en chaque noeud du réseau un disque centré en ce noeud de rayon fixé ne contenant pas d'autre noeud que ce noeud) ; donc l'ensemble  $\left\{ |c\tau + d|^2 / (c, d) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$  a une intersection finie avec tout segment  $[0, U]$ ,  $U > 0$ , donc a fortiori également l'ensemble  $\left\{ |c\tau + d|^2 / A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ et } \Phi(A) \in G \right\}$ ; cet ensemble possède donc un minimum, atteint pour un couple  $(c_0, d_0)$  ; notons  $A_0 = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}$  la matrice correspondante et  $g_0 = \Phi(A_0)$  ; soit alors  $g \in G$  ; on a bien

$$\operatorname{Im}(g(\tau)) = \frac{1}{|c\tau + d|^2} \operatorname{Im}(z) \leq \frac{1}{|c_0\tau + d_0|^2} \operatorname{Im}(\tau) = \operatorname{Im}(g_0(\tau))$$

IV.E.2)  $\tau' = g_0(\tau)$  ; remarquons que  $\operatorname{Re}(t^m(\tau')) = \operatorname{Re} \tau' + m$  ; or étant donné un réel  $x$  il existe toujours un entier  $m$  (l'entier le plus proche de  $-x$ ) tel que  $|x + m| \leq \frac{1}{2}$  ; donc il existe un entier  $m$  et que  $|\operatorname{Re}(t^m(\tau'))| \leq \frac{1}{2}$ .

IV. E. 3) Soit  $\tau'' = t^m(\tau')$  ;  $\operatorname{Im} \tau'' = \operatorname{Im} \tau' = \operatorname{Im} g_0(\tau) \geq \operatorname{Im} g(\tau)$  pour tout  $g \in G$  d'après la définition de  $g_0$  ; or  $s(\tau'') = g(\tau)$  avec  $g = s \circ t^m \circ g_0 \in G$  ; donc  $\operatorname{Im} \tau'' \geq \operatorname{Im} g(\tau) = \operatorname{Im} s(\tau'') = \frac{\operatorname{Im} \tau''}{|\tau''|^2}$  ; on en déduit bien  $|\tau''|^2 \geq 1$ , soit  $|\tau''| \geq 1$  et  $\tau'' \in \mathcal{F}$ .

IV. F. 4) Soit  $g$  un élément de  $\Gamma$  ; si l'on prouve que  $g \in G$ , on aura prouvé  $G = \Gamma$ .

Soit  $\tau$  un point intérieur à  $\mathcal{F}$  et considérons un élément  $g_0 \in G$  défini dans IV. E. 2) associé à  $g(\tau)$  au lieu de  $\tau$  ; soit  $m$  défini dans IV. E. 2) tel que  $t^m \circ g_0(g(\tau)) \in \mathcal{F}$  ; d'après le résultat admis dans l'énoncé (qui est "visuellement" évident...), il est impossible que  $t^m \circ g_0 \circ g$  soit différent de  $id_H$  car sinon  $\tau$  ne serait pas un point intérieur à  $\mathcal{F}$ . Donc  $t^m \circ g_0 \circ g = id_H$  et  $g = g_0^{-1} \circ \tau^{-m} \in G$  C.Q.F.D.