

**Partie I**

1. . Notons par  $P_A$  le polynôme caractéristique d'une matrice carrée  $A$ .  
Pour tout  $C \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $P_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_n) = \det({}^t(C - \lambda I_n)) = \det({}^t C - \lambda I_n) = P_{{}^t C}(\lambda)$ .  
Donc  $Sp_{\mathbb{K}}(C) = Sp_{\mathbb{K}}({}^t C)$ .
2. Les applications  $X \mapsto AX$  et  $X \mapsto XB$  sont linéaires, donc  $\Phi_{A,B}$  est linéaire.
3. Soient  $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $a$   
 $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$  un vecteur propre de  ${}^t B$  associé à la valeur propre  $b$ .  
Comme  $V \neq 0$  et  $W \neq 0$ , il existe  $(i_0, j_0) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $v_{i_0} \neq 0$  et  $w_{j_0} \neq 0$ .
  - a) Par calcul simple :  $V {}^t W = (v_i w_j)$  et comme  $v_{i_0} w_{j_0} \neq 0$ , la matrice  $V {}^t W$  est non nulle.
  - b) On  $\Phi_{A,B}(V {}^t W) = AV {}^t W + V {}^t W B = (AV) {}^t W + V {}^t ({}^t B W) = aV {}^t W + V {}^t (bW) = (a+b)V {}^t W$ . Et donc , par 3.a) ,  $V {}^t W$  est un vecteur propre de  $\Phi_{A,B}$  associé à la valeur propre  $a+b$ .
4. Soient  $\lambda \in Sp(\Phi_{A,B})$  et  $Y$  un vecteur propre associé.
  - a) Par  $\Phi_{A,B}(Y) = \lambda Y$ , on a :  $AY + YB = \lambda Y$ , donc  $AY = \lambda Y - YB = Y(\lambda I_n - B)$   
Soit  $k \in \mathbb{N}$ , supposons que  $A^k Y = Y(\lambda I_n - B)^k$ , on a alors :  
 $A^{k+1} Y = A(A^k Y) = A(Y(\lambda I_n - B)^k) = Y(\lambda I_n - B)(\lambda I_n - B)^k = Y(\lambda I_n - B)^{k+1}$  et la relation est démontrée par récurrence.
  - b) Par a), on a  $A^k Y = Y(\lambda I_n - B)^k$  pour tout entier naturel  $k$  et par combinaison linéaire, on obtient :  
 $P(A)Y = YP(\lambda I_n - B)$  pour tout polyôme  $P \in \mathbb{K}[X]$ .
  - c) On suppose que le polyôme caractéristique  $P_A$  de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  :  $P_A(X) = (-1)^n \prod_{\mu \in Sp(A)} (X - \mu)^{\beta_\mu}$   
où  $\beta_\mu$  est l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\mu$ . En utilisant 4.b) et le théorème de Cayley-Hamilton, on déduit que :  $YP_A(\lambda I_n - B) = 0$ .  
Comme  $Y$  est une matrice non nulle, il en résulte que  $P_A(\lambda I_n - B)$  est non inversible ( car sinon  $Y$  serait nulle).  
Mais  $P_A(\lambda I_n - B) = (-1)^n \prod_{\mu \in Sp(A)} ((\lambda - \mu)I_n - B)^{\beta_\mu}$ , donc l'une des matrices facteurs n'est pas inversible, d'où l'existence de  $a \in Sp(A)$  tel que  $(\lambda - a)I_n - B$  ne soit pas inversible.
5. Soit  $\lambda \in Sp(\Phi_{A,B})$ . Si le le polyôme caractéristique  $P_A$  de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , par 4.c) il existe  $a \in Sp(A)$  tel que  $(\lambda - a)I_n - B$  ne soit pas inversible cad  $b = (\lambda - a)$  est valeur propre de  $B$  et puis  $\lambda = a + b \in Sp(A) + Sp(B)$ .  
D'où l'inclusion :  $Sp(\Phi_{A,B}) \subset Sp(A) + Sp(B)$   
Par 3.b) on a aussi  $Sp(A) + Sp(B) \subset Sp(\Phi_{A,B})$ , ce qui permet d'écrire :  $Sp(\Phi_{A,B}) = Sp(A) + Sp(B)$ .
- 6 On suppose que la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est libre dans  $M_{n,1}(\mathbb{K})$ . Soit  $(Z_1, \dots, Z_n) \in (M_{n,1}(\mathbb{K}))^n$  tel que :  
 $\sum_{i=1}^n Y_i {}^t Z_i = 0$ , alors, pour tout vecteur  $Z \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ , on a :  $0 = \left( \sum_{i=1}^n Y_i {}^t Z_i \right) Z = \sum_{i=1}^n \underbrace{({}^t Z_i Z)}_{\text{scalaires}} Y_i$  et comme la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est libre, on en déduit que :  $\forall i, \forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{K}); {}^t Z_i Z = 0$  et puis (en prenant  $Z = \bar{Z}_i$ ) en obtient  $Z_i = 0$  pour tout  $i$ .

7. Soient  $(U_1, \dots, U_n)$  une base de vecteurs propres de  $A$  et  $(W_1, \dots, W_n)$  une base de vecteurs propres de  ${}^tB$ . Montrons d'abord que la famille  $(U_i {}^tW_j)_{1 \leq i, j \leq n}$  est une base de  $M_n(\mathbb{K})$ . Soient  $(\alpha_{i,j})$  une famille de scalaires telle que  $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_i {}^tW_j = 0$  et soit  $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ , on a alors :

$$0 = \left( \sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_i {}^tW_j \right) X = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_i ({}^tW_j X) = \sum_i \underbrace{\left( \sum_j \alpha_{i,j} {}^tW_j X \right)}_{\mu_i} U_i \text{ et comme } (U_i) \text{ est libre on en déduit}$$

que :  $\mu_i = \left( \sum_j \alpha_{i,j} {}^tW_j \right) X = 0$  pour tout  $i$  et tout  $X$ , d'où :  $\sum_j \alpha_{i,j} {}^tW_j = 0$  pour tout  $i$  et puisque  $(W_j)$  est libre on a :  $\forall (i,j); \alpha_{i,j} = 0$  et par conséquent  $(U_i {}^tW_j)_{i,j}$  est une famille libre de  $M_n(\mathbb{K})$ , de cardinal  $n^2$ , donc c'est une base de  $M_n(\mathbb{K})$ . De plus, par la question 3.b) cette famille est une base de vecteurs propres de  $\Phi_{A,B}$ .

En conclusion :  $\Phi_{A,B}$  est diagonalisable.

8. Les matrices  $A$  et  $B$  sont supposées réelles et symétriques

a) L'application  $\langle, \rangle : (M, N) \mapsto \text{tr}({}^tMN)$  est le produit scalaire standard sur  $M_n(\mathbb{R})$ .

b) Question classique

c) Soient  $(X, Y) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{A,B}(X), Y \rangle &= \text{tr}({}^t(AX + XB)Y) \\ &= \text{tr}({}^tXAY + B {}^tXY) \\ &= \text{tr}({}^tXAY) + \text{tr}(B {}^tXY) \quad \text{car } \text{tr} \text{ est linéaire} \\ &= \text{tr}({}^tXAY) + \text{tr}({}^tXYB) \quad \text{d'après 8.b)} \\ &= \text{tr}({}^tX(A Y + Y B)) \quad \text{encore linéarité de } \text{tr} \\ &= \langle X, \Phi_{A,B}(Y) \rangle \end{aligned}$$

Donc  $\Phi_{A,B}$  est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien  $(M_n(\mathbb{R}), \langle, \rangle)$

## Partie II.

Dans cette partie  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . et  $S$  est une matrice symétrique réelle définie positive.

1. Question du cours : Si  $\lambda \in Sp(S)$  et  $X$  un vecteur propre associé, alors :  $\lambda \|X\|^2 = {}^tXSX > 0$  car  $X \neq 0$  et  $S$  est définie positive, donc  $\lambda > 0$ .
2. Si  $X \in S_n(\mathbb{R})$ , alors  $\Phi_S(X) = SX + XS$  est symétrique car  $X$  et  $S$  sont symétriques. (transposer pour voir..) Réciproquement : Si  $\Phi_S(X) = SX + XS$  est symétrique, alors  $SX + XS = {}^tXS + S {}^tX$  soit :  $\Phi_S(X - {}^tX) = 0$  et comme  $\Phi_S$  est définie, on en déduit que :  $X = {}^tX$  et par suite  $X \in S_n(\mathbb{R})$ .

3. Soit  $A : \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$ .

a) On suppose  $A$  est définie positive et soient  $\lambda$  et  $\mu$  ses valeurs propres (elles sont strictement positives), on a :  $0 < \lambda\mu = \det(A) = ac - b^2$  (\*) et  $0 < \lambda + \mu = \text{tr}(A) = a + c$ , donc  $a$  ne peut-être négatif ou nul car sinon par (\*)  $c \leq 0$  ce qui contredit  $a + c > 0$ .

b) Soit  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ , on suppose  $a > 0$  et  $ac - b^2 > 0$ , on a :

$${}^tUAU = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 - \frac{b^2}{a}y^2 + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{1}{a}(ac - b^2)y^2 > 0. \text{ Donc } A \text{ est définie positive.}$$

c)  $A$  est supposée définie positive,  $X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $\lambda > 0$ , on a :

$$\Phi_A(X_\lambda) = AX_\lambda + X_\lambda A = \overset{\text{calcul}}{\dots} = \begin{pmatrix} 2\lambda a & (\lambda + 1)b \\ (\lambda + 1)b & 2c \end{pmatrix}. \text{ Comme } \lambda > 0, \text{ on a, par 3.a et 3.b), } \Phi_A(X_\lambda)$$

n'est pas définie positive si et seulement si  $4\lambda ac - (\lambda + 1)^2 b^2 \leq 0$  et puisque  $\frac{4\lambda}{(\lambda + 1)^2} \leq 1$ , on choisit  $\lambda$  et  $b$  tel que :  $\frac{4\lambda}{(\lambda + 1)^2} < 1$  et  $\frac{4\lambda}{(\lambda + 1)^2} ac \leq b^2 < ac$  ce qui toujours possible.

5. Résultat du cours :  $S$  est une matrice symétrique réelle, il existe donc  $P \in O_n(\mathbb{R})$  ( $P$  orthogonale) et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  où les  $\lambda_i$  sont réels telles que :  $S = PDP^{-1} = PD {}^tP$ .

6. Soit  $X \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $M = \Phi_S(X)$ ,  $Y = P^{-1}XP = (y_{ij})$  et  $N = P^{-1}MP = (n_{ij})$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } \Phi_D(Y) &= DY + YD = P^{-1}SPY + YP^{-1}SP \\ &= P^{-1}(SPYP^{-1} + PYP^{-1}S)P \\ &= P^{-1}(SX + XS)P \\ &= P^{-1}MP = N \end{aligned}$$

Donc  $\Phi_D(Y) = N$ .

La relation  $DY + YD = N$  donne :  $(\lambda_i + \lambda_j)y_{ij} = n_{ij}$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , soit :  $y_{ij} = \frac{n_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j}$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

Dans la suite de la question 6. la matrice  $M$  est supposée symétrique définie positive.

b) Par  $N = P^{-1}MP$  et  $M$  symétrique définie positive, on a :  $N$  est symétrique définie positive car  ${}^tN = {}^t(PMP) = {}^tP^tMP = {}^tPMP = N$  et pour tout  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ , on a :  ${}^tXNX = {}^t(PX)M(PX) > 0$  ( $X \neq 0$  et  $P$  inversible).

c) Soit  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$$- {}^tUYU = \sum_{i,j} y_{ij} \cdot u_i u_j = \sum_{i,j} \frac{n_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j} \cdot u_i u_j \text{ d'après 6.a).}$$

- Pour  $\alpha > 0$ , on a :  $1 - \alpha < 1$ , donc l'application  $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\alpha}} = t^{\alpha-1}$  (qui est définie et continue sur  $]0, 1[$ ) est  $]0, 1[$ -intégrable.

- Pour  $s \in ]0, 1[$ , posons  $U(s) = \begin{pmatrix} u_1 s^{\lambda_1 - \frac{1}{2}} \\ \vdots \\ u_n s^{\lambda_n - \frac{1}{2}} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a :

$${}^tU(s)NU(s) = \sum_{i,j} n_{ij} (u_i s^{\lambda_i - \frac{1}{2}})(u_j s^{\lambda_j - \frac{1}{2}}) = \sum_{i,j} n_{ij} \cdot u_i u_j s^{\lambda_i + \lambda_j - 1}, \text{ donc l'application}$$

$s \mapsto {}^tU(s)NU(s)$  est combinaison linéaire de fonctions continues et  $]0, 1[$ -intégrables ( $\lambda_i + \lambda_j > 0$  pour tout  $(i, j)$ ), donc intégrable sur  $]0, 1[$ .

$$- \int_0^1 {}^tU(s)NU(s)ds = \int_0^1 \sum_{i,j} n_{ij} \cdot u_i u_j s^{\lambda_i + \lambda_j - 1} = \sum_{i,j} \frac{n_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j} \cdot u_i u_j = {}^tUYU.$$

Si  $U$  est non nul, alors pour tout  $s \in ]0, 1[$   $U(s)$  est aussi non nul et puisque  $N$  est définie positive, on a :  ${}^tU(s)NU(s) > 0$  pour tout  $s \in ]0, 1[$  et puis par intégration, on a :  ${}^tUYU = \int_0^1 {}^tU(s)NU(s)ds > 0$ .

d) Par ce précède  $Y$  est une matrice symétrique définie positive et puis par la relation  $X = PY^tP$ , on déduit que  $X$  est définie positive.

### Partie III Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Pour  $B = -A$ , on a, pour tout  $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$  :  $\Phi_{A,B}(X) = AX - XA$

1. On prend  $A = \Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  avec les  $\mu_i$  deux à deux distincts.

a) Ici  $n = 2$  :

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \ker(\Phi_{A,-A}) \Leftrightarrow AX - XA = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & y(\mu_2 - \mu_1) \\ (\mu_1 - \mu_2)z & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = z = 0.$$

Donc  $X \in \ker(\Phi_{A,-A}) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ . En conclusion :  $\ker(\Phi_{A,-A}) = \text{vect}(E_{11}, E_{22})$  où  $(E_{ij})_{i,j}$  est la base canonique de  $M_n(\mathbb{C})$  et  $\dim(\ker(\Phi_{A,-A})) = 2$ .

b) Ici  $n$  est quelconque :

Soit  $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ , on a :  $X \in \ker(\Phi_{A,-A}) \Leftrightarrow XA - AX = 0 \Leftrightarrow \forall i, j; (\mu_i - \mu_j)x_{ij} = 0 \Leftrightarrow \forall i, j; (i \neq j \Rightarrow x_{ij} = 0)$ . Donc  $\ker(\Phi_{A,-A}) = \text{vect}(E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$  où  $(E_{ij})_{i,j}$  est la base canonique de  $M_n(\mathbb{C})$  et par suite  $\dim(\ker(\Phi_{A,-A})) = n$ .

On peut aussi démontrer que  $\ker(\Phi_{A,-A}) = C[A] = \text{vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$

2.  $A$  est une matrice de  $M_n(\mathbb{C})$  ayant  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes.

- a) cours : par exemple : Le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{C}$  et à racines simples, donc  $A$  est diagonalisable
- b) Soit  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que  $A = P\Delta P^{-1}$ ,  $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$   
 Soit  $X \in \ker(\Phi_{A,-A})$ , posons  $Y = P^{-1}XP$ , on a alors  $\Delta Y = Y\Delta$ , donc  $Y \in \ker \Phi_{\Delta,-\Delta} = \text{vect}(E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$   
 Soit  $X = PDP^{-1}$  où  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  alors  $X$  commute avec  $A$ , donc  $X \in \ker(\Phi_{A,-A})$ .  
 Conclusion :  $\ker(\Phi_{A,-A}) = \Psi(\ker \Phi_{\Delta,-\Delta})$  où  $\Psi$  est l'isomorphisme d'espace vectoriel  $M \mapsto PMP^{-1}$  et  $\dim(\ker(\Phi_{A,-A})) = n$ .

3. Soit  $\|\cdot\|$  une norme quelconque sur  $M_n(\mathbb{C})$ .

- a) L'application  $A \mapsto \Phi_{A,-A}$  est linéaire (évident) et  $\dim M_n(\mathbb{C}) < +\infty$ , donc continue.
- b) Soit  $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'application  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \mapsto \det((a_{ij})_{1 \leq i, j \leq q})$  est continue car polynomiale en les coefficients de  $A$ .

4. Soit  $M \in M_n(\mathbb{C})$ , Comme  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos,  $M$  est trigonalisable :  $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ ;  $P^{-1}MP = T$  avec

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit  $\mu = \min\{|\lambda_i - \lambda_j|, \lambda_i \neq \lambda_j\} > 0$  et  $\mu = 1$  si les  $\lambda_i$  sont tous égaux. Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , posons  $T_p = T + \frac{\mu}{p}D$  avec  $D = \text{diag}(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n})$ .

Posons  $\delta_i = \lambda_i + \frac{\mu}{ip}$ , on a pour  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $i \neq j$  :

- \* Si  $\lambda_i = \lambda_j$ , alors  $\delta_i \neq \delta_j$
- \* Si  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , supposons  $\delta_i = \delta_j$ , alors  $|\lambda_i - \lambda_j| = \mu \left| \frac{1}{ip} - \frac{1}{jp} \right| < \mu$  impossible, donc  $\delta_i \neq \delta_j$

Les valeurs propres de  $T_p$ , à savoir les  $\delta_i$ , sont deux à deux distinctes, donc  $T_p$  est diagonalisable.

Or  $T = \lim_p T_p$  et par suite  $M = PTP^{-1} = \lim_{p \rightarrow +\infty} PT_p P^{-1}$ . La conclusion en résulte.

5. Soit  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

- a) Si  $r = n$ , alors  $O_r = \{C \in M_n(\mathbb{C}), \text{rg}(C) > r\} = \emptyset$  donc c'est un ouvert  
 Supposons  $r \leq n - 1$ , soit  $M = (m_{ij})_{i,j}$  un élément de  $O_r = \{C \in M_n(\mathbb{C}), \text{rg}(C) \geq r + 1\}$ , comme  $\text{rg}(M) \geq r + 1$ , il existe une matrice carrée extraite de  $M$  d'ordre  $r + 1$  qui soit inversible ie : il existe  $I, J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $\text{card}(I) = \text{card}(J) = r + 1$  tel que la matrice  $M' = (m_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$  soit inversible, donc  $\det(M') \neq 0$ .  
 L'application  $\Psi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $X = (x_{ij})_{i,j} \mapsto \det(X' = (x_{ij})_{(i,j) \in I \times J})$  est continue et comme  $\Psi(M) \neq 0$ , il existe  $V$  voisinage de  $M$  dans  $M_n(\mathbb{C})$  tel que :  $\forall X \in V, \Psi(X) \neq 0$  c'est à dire tout point de  $V$  est de rang  $\geq r + 1 > r$ , donc  $V \subset O_r$ .  
 En conclusion :  $O_r$  est un ouvert de  $M_n(\mathbb{C})$ .
- b) Soit  $m \geq 2$  et  $s \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , Notons  $\Gamma = \{M \in M_m(\mathbb{C}); \text{rg}(M) = s\}$ , on a :  $\Gamma \subset \Gamma' = \mathcal{C}_{M_m(\mathbb{C})}^{O_s}$   
 $\Gamma'$  est fermé dans  $M_m(\mathbb{C})$  (complémentaire d'un ouvert de  $M_m(\mathbb{C})$ ), donc  $\bar{\Gamma} = \text{adh}(\Gamma) \subset \Gamma'$  ce qui permet de conclure que si  $(A_p)_p$  est une suite de points de  $\Gamma$  ( $\forall p, \text{rg}(A_p) = s$ ), convergeant vers  $A$ , alors  $A \in \Gamma'$  ie  $\text{rg}(A) \leq s$ .

6. Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , par 4., il existe une suite  $(A_p)_p$  de matrices diagonalisable à valeurs propres deux à deux distinctes telle que  $\lim_p A_p = A$ .

Si  $X \in \ker \Phi_{A_p, -A_p}$ , alors  $\Phi_{A_p, -A_p}(X) = 0$  et par 3.a)  $0 = \lim_p \Phi_{A_p, -A_p}(X) = \Phi_{A, -A}(X)$  et par suite  $X \in \ker \Phi_{A, -A}$ . D'où  $\forall p \in \mathbb{N}, \ker \Phi_{A_p, -A_p} \subset \ker \Phi_{A, -A}$  et puis  $n = \dim \ker \Phi_{A_p, -A_p} \leq \dim \ker \Phi_{A, -A}$ .