

Première épreuve CCP filière MP

I. Polynômes de Tchebychev

1.a) Tout réel θ vérifie $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^n) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \theta)^{n-k} i^k (\sin \theta)^k\right)$

Or i^k est réel quand k est pair et imaginaire pur sinon, ainsi

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} (\cos \theta)^{n-2k} i^{2k} (\sin \theta)^{2k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} (\cos \theta)^{n-2k} (1 - (\cos \theta)^2)^k$$

Finalement, le polynôme $T = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} X^{n-2k} (1 - X^2)^k$ convient.

En effet, c'est un polynôme à coefficients réels vérifiant $T(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ pour tout réel θ . Pour tout k , le polynôme $X^{n-2k} (1 - X^2)^k$ est degré n donc, par somme, T est de degré au plus n . Son coefficient de degré n est $\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}$ qui est non nul (somme de termes strictement positifs) donc T est bien de degré n .

1.b) Soit P et Q deux polynômes réels de degré n vérifiant $P(\cos \theta) = Q(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ pour tout réel θ . Alors $P - Q$ est un polynôme réel de degré au plus n admettant une infinité de racines puisque tout réel s'écrivant $\cos(\theta)$, i.e. tout réel de $[-1; 1]$, est un zéro de $P - Q$. Le polynôme $P - Q$ est donc le polynôme nul et on a bien $P = Q$.

Le polynôme T est donc unique.

2.a) Pour tout réel x de $[-1; 1]$, on a, en posant $\theta = \arccos x$,

$$\begin{aligned} T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) &= \cos((n+2)\theta) - 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) + \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta)\cos\theta - \sin((n+1)\theta)\sin\theta - 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) \\ &\quad + \cos((n+1)\theta)\cos\theta + \sin((n+1)\theta)\sin\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ pour tout x de $[-1; 1]$.

2.b) Par définition de T_n et d'après la question 1.b), on obtient $T_0 = 1, T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$ car $\cos 0 = 1$ et $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$.

D'après les questions 2.a et b, on obtient $T_3 = C_3^0 X^3 - C_3^2 X(1 - X^2)$ i.e. $T_3 = 4X^3 - 3X$.

2.c) D'après la question 1.a, le coefficient de terme de plus haut degré (i.e. n) de T est :

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k + \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \right) = \begin{cases} \frac{1}{2} ((1+1)^n + (1-1)^n) = \boxed{2^{n-1} \text{ si } n > 0} \\ \boxed{1 \text{ pour } n = 0} \end{cases}$$

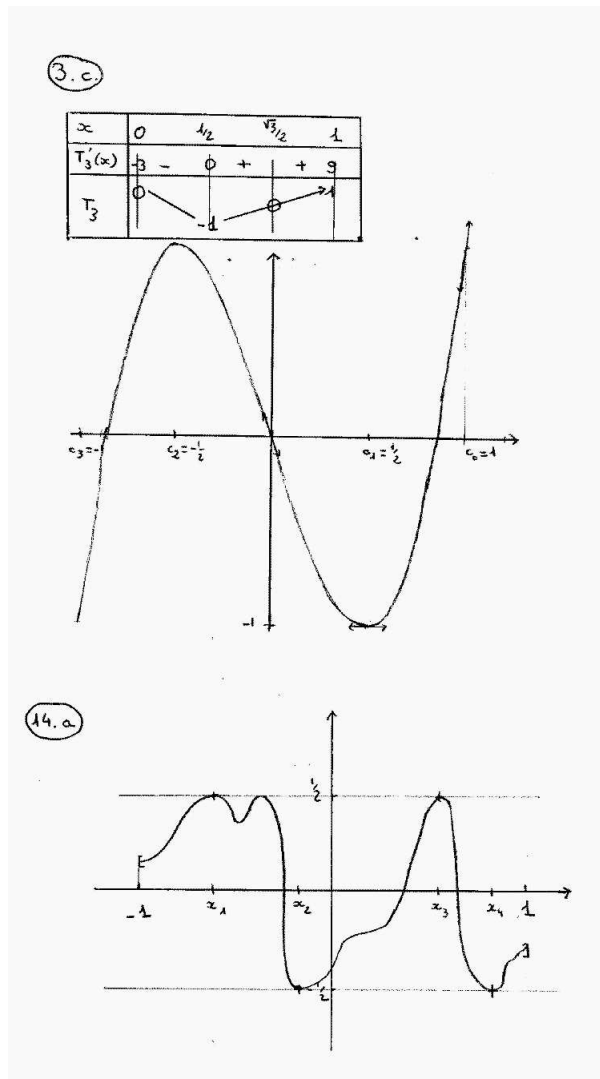
3.a) Quand k varie de 0 à $n - 1$, les réels $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont distincts et compris entre 0 et π . Les réels $\cos \theta_k$ sont donc n racines distinctes de T_n car $T_n(\theta_k) = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} = 0$. Or T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} (question précédente). Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos \theta_k)$$

3.b) On a $\|T_n\|_\infty = \sup_{x \in [-1;1]} |T_n(x)| = \sup_{x \in [-1;1]} |\cos(n \arccos(x))|$ donc $\|T_n\|_\infty \leq 1$. Par ailleurs $T_n(c_k) = \cos(n \arccos \cos \frac{k\pi}{n})$. Or $k\pi/n$ est compris dans $[0; \pi]$ intervalle sur lequel $\arccos \circ \cos$ est l'identité donc $T_n(c_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$. Ainsi $\|T_n\|_\infty \geq 1$ et finalement

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad \|T_n\|_\infty = 1 = |T_n(c_k)| \text{ et } T_n(c_k) = -T_n(c_{k+1}) = (-1)^k \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

3.c) D'après la question 2b, on a $T_3 : x \in [-1; 1] \mapsto 4x^3 - 3x$. C'est donc une fonction impaire de dérivée $T_3' : x \mapsto 3(4x^2 - 1)$ et de tableau de variations



II. Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

4. Pour toute fonction h de E , l'application $\beta : t \in]-1; 1[\mapsto h(t)/\sqrt{1-t^2}$ est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus, l'application $t \mapsto h(t)/\sqrt{1+t}$ est continue sur le segment fermé $[0; 1]$ (comme quotient de fonctions continues) donc elle y est bornée en valeur absolue. Soit M un de ses majorants. La fonction continue H vérifie alors $|\beta(t)| \leq M/\sqrt{1-t}$ or $t \mapsto 1/\sqrt{1-t}$ est intégrable sur $[0; 1[$ (c'est une fonction de référence) donc β est intégrable sur $[0; 1[$.

De la même façon, β est intégrable sur $] -1; 0]$.

Finalement $t \in]-1; 1[\mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $] -1; 1[$.

5.a) Comme $\beta : t \mapsto h(t)/\sqrt{1-t^2}$ est continue sur l'intervalle $] -1; 1[$, elle y admet des primitives, soit H l'une d'elles. La fonction H est donc dérivable et par conséquent la fonction $\phi : x \in]-1; 1[\mapsto \int_{-x}^x \beta(t) dt = H(x) - H(-x)$ aussi. Sa dérivée vérifie $\phi'(x) = \beta(x) + \beta(-x)$ pour tout x de $] -1; 1[$.

Par ailleurs, la fonction β est positive comme quotient de fonctions positives, donc la dérivée ϕ' est positive sur $] -1; 1[$. Ainsi ϕ est croissante sur $] -1; 1[$. Or $\phi(0) = 0$ et par hypothèse $\lim_{x \rightarrow 1^-} \phi(x) = 0$ donc ϕ est nulle sur $[0; 1[$. Par ailleurs β étant une fonction continue positive sur $[-x; x]$ pour tout x de $[0; 1[$, donc son intégrale $\phi(x)$ sur ce segment est nulle si et seulement si la restriction de β à $[-x; x]$ est nulle. Ainsi h est nulle sur $[-x; x]$ pour tout x de $[0; 1[$, i.e. sur $] -1; 1[$ et donc par continuité de h en 1 et -1 sur $[-1; 1]$ (on a $h(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 0$).

5.b) Soit f et g dans E , alors $f \times g$ est aussi dans E car le produit de fonctions continues est une fonction continue, donc $\langle f, g \rangle$ est bien défini. De plus, on a

- pour toute fonction f et g de E , $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ (symétrie);
- pour tout f de E , l'application $h \in E \mapsto \langle f, h \rangle$ est linéaire (par linéarité de l'intégrale) donc $h \in E \mapsto \langle h, f \rangle$ aussi par symétrie;
- pour tout f de E , on a $\langle f, f \rangle \geq 0$ car $t \mapsto f(t)f(t)/\sqrt{1-t^2}$ est une fonction positive sur $] -1; 1[$ donc pour tout x positif, comme $-x \leq x$, l'intégrale $\int_{-x}^x f(t)f(t)/\sqrt{1-t^2} dt$ est positive donc sa limite $\langle f, f \rangle$ aussi.
- Si f est dans E et vérifie $\langle f, f \rangle = 0$ alors f est la fonction nulle (en effet d'après 5a, on sait que f^2 est nulle).

Ainsi, on vient de vérifier les propriétés permettant d'affirmer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

6. Soit n et m deux entiers naturels. Les fonctions T_n et T_m appartiennent bien à E . On a

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 \frac{\cos(n \arccos t) \cos(m \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_{-x}^x \frac{\cos(n \arccos t) \cos(m \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Or pour tout x strictement positif, la fonction \arccos est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-x; x]$ donc est un changement de variables licite sur $[-x; x]$. De plus $\arccos'(t) = -1/\sqrt{1-t^2}$. Ainsi, en faisant le changement de variables, on obtient

$$\langle T_n, T_m \rangle = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(- \int_{\arccos(-x)}^{\arccos(x)} \cos(ns) \cos(ms) ds \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_{\arccos(x)}^{\arccos(-x)} \frac{\cos((n+m)s) + \cos((m-n)s)}{2} ds$$

Or les fonctions $s \mapsto \cos((n+m)s)$ et $s \mapsto \cos((m-n)s)$ sont continues sur $[0; \pi]$ intervalle contenant $[\arccos(x); \arccos(-x)]$, donc par linéarité de l'intégrale puis passage à la limite, on obtient

$$\langle T_n, T_m \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n+m)s) ds + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((m-n)s) ds = \frac{\pi (\delta_{n+m,0} + \delta_{m-n,0})}{2}$$

Ainsi, on a $\langle T_n, T_m \rangle = 0$ si $n \neq m$ et $\langle T_n, T_n \rangle = \pi$ si $n = 0$ et $\pi/2$ sinon.

Ainsi, pour tout naturel n , la famille (T_0, T_1, \dots, T_n) est une famille orthogonale de E_n puisque les éléments T_i sont bien dans E_n .

7.a) L'ensemble E_n est un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace vectoriel E qui est muni d'une norme euclidienne. Ainsi le théorème de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie assure que pour tout élément f de E , il existe un unique vecteur $t_n(f)$ de E_n réalisant la distance de f à E_n . C'est la projection orthogonale de f sur E_n .

7.b) D'après la question 6, la famille (T_0, T_1, \dots, T_n) est une famille orthogonale de E_n . Aucun des T_i n'étant nul, la famille $(T_0/\|T_0\|_2, \dots, T_n/\|T_n\|_2)$ est une famille orthonormale de E_n , contenant $n+1 = \dim E_n$ vecteurs, c'est donc une base orthonormale de E_n . Ainsi

$$t_n(f) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle}{\|T_k\|_2} \frac{T_k}{\|T_k\|_2} = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle}{\langle T_k, T_k \rangle} T_k$$

8. D'après la question 7a et la bilinéarité de \langle, \rangle , on a

$$d_2(f, E_n) = \sqrt{\langle f - t_n(f), f - t_n(f) \rangle} = \sqrt{\|f\|_2^2 - 2 \langle f, t_n(f) \rangle + \|t_n(f)\|_2^2}$$

Or la question 7b et la linéarité de $\langle f, \cdot \rangle$ montrent que $\langle f, t_n(f) \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\langle T_k, T_k \rangle}$.

Par ailleurs, la famille (T_0, \dots, T_n) étant orthogonale, on a aussi

$$\|t_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n \left(\frac{\langle f, T_k \rangle}{\langle T_k, T_k \rangle} \right)^2 \langle T_k, T_k \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\langle T_k, T_k \rangle}$$

D'où en regroupant ces deux expressions

$$d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}$$

9.a) Comme E_n est inclus dans E_{n+1} , la suite $(d_2(f, E_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Or elle est minorée (par 0) donc convergente. Ainsi la suite de terme général $(d_2(f, E_n))^2$ qui vaut $\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \langle f, T_k \rangle^2 / \|T_k\|_2^2$ est convergente. Donc d'après le théorème sur les

opérations sur les suites convergentes, la suite de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$ est convergente i.e. la série $\sum_{k \geq 0} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$ est convergente.

9.b) La série $\sum_{k \geq 0} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$ est convergente. Son terme général tend donc vers zéro. Or pour $k > 0$, on a $\langle T_k, T_k \rangle = \pi/2$ (question 6), donc par produit, la suite de terme général $\langle f, T_k \rangle^2$ converge vers zéro donc celle de terme général $\langle f, T_k \rangle$ aussi. Ainsi

la suite de terme général $\int_{-1}^1 \frac{f(t) T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ tend vers zéro.

10.a) Sur $[-1; 1]$, on a $|f(x)/\sqrt{x^2-1}| \leq \|f\|_\infty/\sqrt{x^2-1}$. Or comme la fonction constante $\|f\|_\infty$ est dans E , on a par croissance de l'intégrale à bornes croissantes (les deux membres suivants existant bien)

$$\int_{-1}^1 \frac{f^2(x)}{\sqrt{x^2-1}} dx \leq \int_{-1}^1 \frac{\|f\|_\infty^2}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad \text{i.e.} \quad \|f\|_2^2 \leq \|f\|_\infty^2 \langle T_0, T_0 \rangle$$

Ainsi d'après la question 6 et en prenant la racine carrée, on obtient $\|f\|_2 \leq \sqrt{\pi} \|f\|_\infty$

10.b) La fonction f est continue sur le segment fermé borné $[-1; 1]$, donc y est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'après le théorème de Weierstrass. On définit alors la suite d'entiers naturels $(\alpha_n = \max(\deg P_n, 0))_{n \in \mathbb{N}}$.

Par définition du polynôme $t_{\alpha_n}(f)$, on a $\|f - t_{\alpha_n}(f)\|_2 \leq \|f - P_n\|_2$. La question 10, comme $f - P_n$ est dans E , assure $\|f - T_n\|_2 \leq \sqrt{\pi} \|f - P_n\|_\infty$. Ainsi $\|f - t_{\alpha_n}(f)\|_2 \leq \sqrt{\pi} \|f - P_n\|_\infty$. Or la suite de terme général $\|f - P_n\|_\infty$ converge vers 0 et par comparaison $(\|f - t_{\alpha_n}(f)\|_2)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi. Finalement, on obtient:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \forall n \geq N \quad \|f - t_{\alpha_n}(f)\|_2 < \varepsilon \quad (\text{convergence de la suite vers 0})$$

$$\forall p \geq \alpha_N \quad \|f - t_p(f)\|_2 \leq \|f - t_{\alpha_N}(f)\|_2 \quad (\text{décroissance de la suite } (d_2(f, E_k))_{k \in \mathbb{N}})$$

et donc $\|f - t_p(f)\|_2 < \varepsilon$

On a donc exactement écrit que la suite $(\|f - t_p(f)\|_2)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

11.a) D'après les questions 10.b et 7.a, la suite de terme général $d_2(f, E_n)$ converge vers 0 et donc celle de terme général $(d_2(f, E_n))^2$ aussi. En utilisant la question 8, on obtient donc

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}$$

11.b) Soit une fonction h de E telle que $\int_{-1}^1 \frac{h(t) T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$ pour tout n autrement dit $\langle h, T_n \rangle = 0$ pour tout n . Alors d'après la question précédente, la norme $\|h\|_2$ est nulle et donc h est la fonction nulle sur $[-1; 1]$.

III. Polynômes de meilleure approximation au sens de Tchebychev

12. L'espace vectoriel E_n étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. On considérera donc (ce que suggère l'énoncé) la topologie pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.

12.a) La partie K est non vide car elle contient le polynôme nul.

L'application $\psi : Q \in E_n \mapsto \|f - Q\|_\infty - \|f\|_\infty \in \mathbb{R}$ satisfait pour tout $(P; Q)$ de E^2 , l'égalité $|\psi(Q) - \psi(P)| = |||Q - f\|_\infty - \|P - f\|_\infty|$. Or $\| \cdot \|_\infty$ est une norme sur E donc vérifie la seconde inégalité triangulaire, ainsi $|||Q - f\|_\infty - \|P - f\|_\infty| \leq \|Q - P\|_\infty$. Cela prouve que ψ est une application 1-lipschitzienne donc continue. L'image réciproque par ψ du fermé \mathbb{R}_+ de \mathbb{R} est K qui est donc un fermé de E_n .

Pour tout Q de K , l'inégalité triangulaire assure $\|Q\|_\infty \leq \|Q - f\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$. Cela démontre bien que K est une partie bornée de E_n .

12.b) L'ensemble K est une partie fermée bornée d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, c'est donc une partie compacte de E_n , non vide d'après la question précédente.

13.a) Comme K est une partie non vide de E_n , on obtient $d_\infty(f, K) \geq d_\infty(f, E_n)$.

Par définition de $d_\infty(f, E_n)$, comme le polynôme nul est dans E_n , on a $d_\infty(f, E_n) \leq \|f\|_\infty$. Deux cas se présentent donc

- $d_\infty(f, E_n) = \|f\|_\infty$: dans ce cas, comme $d_\infty(f, K) \leq \|f\|_\infty$ puisque 0 est dans K , on obtient $d_\infty(f, K) \leq d_\infty(f, E_n)$.

- $d_\infty(f, E_n) < \|f\|_\infty$: dans ce cas, par définition de $d_\infty(f, E_n)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme R_ε de E_n vérifiant $d_\infty(f, E_n) \leq \|R_\varepsilon - f\|_\infty \leq d_\infty(f, E_n) + \varepsilon$. Ainsi pour tout $\varepsilon < \|f\|_\infty - d_\infty(f, E_n)$ (ce dernier réel étant bien strictement positif), le polynôme R_ε vérifie $\|R_\varepsilon - f\|_\infty \leq d_\infty(f, E_n) + \varepsilon < \|f\|_\infty$ donc est en fait dans K . Ainsi, il vérifie $d_\infty(f, K) \leq \|R_\varepsilon - f\|_\infty$ et finalement $d_\infty(f, K) \leq d_\infty(f, E_n) + \varepsilon$ pour tout ε assez petit, d'où en faisant tendre ε vers 0 l'inégalité $d_\infty(f, K) \leq d_\infty(f, E_n)$.

- Dans les deux cas, on a prouvé l'inégalité $d_\infty(f, K) \leq d_\infty(f, E_n)$ et donc d'après l'inégalité trouvée au début de la question, on a bien montré l'égalité $d_\infty(f, K) = d_\infty(f, E_n)$.

13.b) La fonction $Q \in E_n \mapsto \|Q - f\|_\infty \in \mathbb{R}$ est continue (c'est la somme de ψ (question 12.a) et de la fonction constante donc continue $\|f\|_\infty$). Sa restriction à la partie compacte K (question 12.b) est donc bornée et atteint ses bornes en particulier l'inférieure. Ainsi,

il existe P dans K donc dans E_n vérifiant $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, K)$ i.e. $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)$ d'après la question 13.a.

14.a) D'après la question 3.b, $\Phi = T_3/2$ a pour norme $\|\Phi\|_\infty = 1/2$ et équi oscille sur les 4 points $x_l = \cos(l\pi/3)$ avec l variant de 0 à 3.

Voici, le graphe d'une autre fonction qui convient :

14.b) C'est exactement le résultat obtenu à la question 3.b. (qui était plus précis que celui demandé par l'énoncé).

15.a) Pour tout x de $[-1; 1]$, on a $Q(x) - P(x) = Q(x) - f(x) + (f(x) - P(x))$ et $|Q(x) - f(x)| \leq \|Q - f\|_\infty$ donc $|Q(x) - f(x)| < \|P - f\|_\infty$. Pour les réels x_i , on a de plus $|f(x) - P(x)| = \|P - f\|_\infty$, donc pour ces réels, le signe de $Q(x) - P(x) = Q(x) - f(x) + (f(x) - P(x))$ est bien celui de $f(x) - P(x)$.

15.b) Pour tout i de $\{0, \dots, n\}$, la fonction polynômiale $P - Q$ est continue sur $[x_i; x_{i+1}]$ et $(P - Q)(x_i)$ et $(P - Q)(x_{i+1})$ sont de signes différents (d'après la question 15.a car $f - P$ équi oscille sur les x_i). Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique donc et assure que $P - Q$ s'annule sur cet intervalle $[x_i; x_{i+1}]$, en fait sur $]x_i; x_{i+1}[$ car $P - Q$ ne s'annule pas aux bornes (question 15.a). On a donc trouvé $\text{card}(\{0, \dots, n\}) = n + 1$ racines au polynôme $P - Q$ qui est de degré au plus n (car dans E_n). Ce polynôme est donc le polynôme nul i.e. $\boxed{P = Q}$.

Ce dernier résultat contredit l'hypothèse $\|Q - f\|_\infty < \|P - f\|_\infty$. un tel polynôme Q n'existe donc pas, ce qui signifie que tout polynôme R de E_n vérifie l'inégalité $\|P - f\|_\infty \leq \|R - f\|_\infty$ autrement dit $\boxed{P \text{ est un P.M.A.}}$ d'après la caractérisation (ii).

16. Le polynôme $q_n = X^{n+1} - 2^{-n}T_{n+1}$ est de degré au plus $n + 1$ car X^{n+1} et T_{n+1} sont de degré $n + 1$. Le coefficient du terme de degré $n + 1$ est $1 - 2^{-n} \times 2^{n+1-1}$ d'après la question 2.c, autrement dit nul. Ainsi q_n est bien de degré au plus n et donc dans E_n . De plus, $f - q_n = 2^{-n}T_{n+1}$ équi oscille sur $n + 2$ points d'après la question 14.b (le fait de multiplier par une constante non nulle ne change rien au caractère équi oscillant), donc la question 15.b assure que $\boxed{q_n \text{ est un P.M.A. d'ordre } n \text{ de } f}$.

17. Soit P un polynôme unitaire de degré $n + 1$. Alors il existe un polynôme Q de E_n tel que $P = X^{n+1} - Q$. D'après la question 16, on a $\|f - q_n\|_\infty \leq \|f - Q\|_\infty$ avec $f : x \mapsto x^{n+1}$. Ainsi, on a par définition de q_n , l'inégalité $\|2^{-n}T_{n+1}\|_\infty \leq \|P\|_\infty$ soit encore $\boxed{2^{-n}\|T_{n+1}\|_\infty \leq \|P\|_\infty}$.

18.a) Soit f une fonction polynômiale de degré $n + 1$ et de coefficient dominant a (donc $a \neq 0$). D'après la caractérisation (i) du P.M.A., on cherche Q dans E_n tel que $\|f - Q\|_\infty$ c'est à dire $|a| \|a^{-1}f - a^{-1}Q\|_\infty$ est minimum. Or le polynôme $a^{-1}f$ est de degré $n + 1$ et unitaire, et quand Q décrit E_n , les polynômes $a^{-1}f - a^{-1}Q$ décrivent entièrement l'ensemble des polynômes unitaires de degré $n + 1$. Ainsi d'après la question 17, $\|a^{-1}f - a^{-1}Q\|_\infty$ est minimum (quand Q décrit E_n) pour $a^{-1}f - a^{-1}Q = 2^{-n}T_{n+1}$.

Finalement, $\boxed{\text{un P.M.A. de } f \text{ est donc } f - 2^{-n}aT_{n+1}}$ (qui est bien un élément de E_n).

18.b) La fonction polynômiale $x \mapsto 5x^3 + 2x - 3$ est de degré $3 = 2 + 1$, donc admet un P.M.A. d'ordre 2 qui est $Q = 5x^3 + 2x - 3 - 2^{-2} \times 5T_3(x)$ d'après 18.a. D'après la question 2.b, on a $Q = 5x^3 + 2x - 3 - 5x^3 - \frac{3}{4}x = \boxed{\frac{5}{4}x - 3}$.