

## Concours Communs Polytechniques

## Mathématiques 2

## I. Étude d'un exemple

1. Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  son polynôme caractéristique  $\chi_A$  vaut :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{vmatrix} = X^2 - (a + d)X + (ad - bc) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$$

or d'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $\chi_A(A) = 0$  donc  $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$ .  
On peut bien sûr obtenir également ce résultat par un calcul direct.

2. Par définition,  $\mathbb{A}$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $I_2$  et  $A$  donc c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{A}$  contient  $I_2$ . De plus,  $A$  n'est pas une matrice scalaire donc  $(I_2, A)$  est une famille libre et par conséquent une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{A}$ . Enfin,  $\mathbb{A}$  est stable pour le produit car si  $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$ ,

$$(aI_2 + bA)(a'I_2 + b'A) = (aa' - bb'\det(A))I_2 + (ab' + a'b + bb'\operatorname{tr}(A))A \in \mathbb{A}$$

3.  $\diamond$  Supposons qu'il existe une matrice  $B = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$  telle que  $B^2 = -I_2$ . Alors toute valeur propre  $\lambda$  de  $B$  vérifie  $\lambda^2 = -1$  donc  $B$  ne possède pas de valeur propre réelle. On en déduit que  $A$  ne possède pas non plus de valeur propre réelle (car  $\mu$  valeur propre de  $A$  implique  $a + b\mu$  valeur propre de  $B$ ). Le polynôme caractéristique de  $A$  n'a donc pas de racine réelle donc son discriminant  $\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A$  est strictement négatif.

$\diamond$  Réciproquement, supposons  $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A < 0$ .

Si  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(aI_2 + bA)^2 = (a^2 - b^2\det A)I_2 + (2ab + b^2\operatorname{tr} A)A$ . Or le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2\det A = -1 \\ 2ab + b^2\operatorname{tr} A = 0 \end{cases}$$

équivalait à

$$\begin{cases} b^2\det A = a^2 + 1 \\ a = -\frac{b}{2}\operatorname{tr} A \end{cases}$$

ou encore à

$$\begin{cases} b^2 = \frac{4}{4\det A - (\operatorname{tr} A)^2} \\ a = -\frac{b}{2}\operatorname{tr} A \end{cases}$$

Il existe donc des matrices de  $\mathbb{A}$  dont le carré vaut  $-I_2$  par exemple

$$B = \frac{2}{\sqrt{4\det A - (\operatorname{tr} A)^2}} \left( \left( -\frac{\operatorname{tr} A}{2} \right) I_2 + A \right)$$

4. On suppose que  $B \in \mathbb{A}$  est telle que  $B^2 = -I_2$ . Alors  $B$  n'est pas une matrice scalaire (car si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda I_2)^2 = \lambda^2 I_2 \neq -I_2$ ) donc  $(I_2, B)$  est une famille libre de  $\mathbb{A}$ . Comme  $\mathbb{A} = \operatorname{vect}\{I_2, A\}$  on en déduit que  $\mathbb{A}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension deux et que  $(I_2, B)$  en est une base.

Définissons alors  $f$  comme l'unique application linéaire entre les  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{C}$  telle que  $f(I_2) = 1$  et  $f(B) = i$ . Alors  $f$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels car elle envoie une base de  $\mathbb{A}$  sur une base de  $\mathbb{C}$ . De plus  $f(I_2) = 1$ . Enfin, si  $M = xI_2 + yB$  et  $M' = x'I_2 + y'B$  sont deux éléments de  $\mathbb{A}$ ,  $MM' = xx'I_2 + (xy' + x'y)B + yy'B^2 = (xx' - yy')I_2 + (xy' + x'y)B$  donc

$$f(MM') = (xx' - yy')f(I_2) + (xy' + x'y)f(B) = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

et

$$f(M)f(M') = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

On a donc  $f(MM') = f(M)f(M')$  ce qui achève de montrer que  $f$  est un isomorphisme d'algèbres entre  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{C}$ .

5. D'après le calcul fait en question 3. et  $A$  étant non scalaire, si  $M = aI_2 + bA$ , la condition  $M^2 = 0$  équivaut à  $\begin{cases} a^2 - b^2 \det A = 0 \\ 2ab + b^2 \operatorname{tr} A = 0 \end{cases}$  c'est-à-dire à

$$b = a = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = -\frac{b}{2} \operatorname{tr} A \\ b^2 \left( \frac{1}{4} (\operatorname{tr} A)^2 - \det A \right) = 0 \end{cases}$$

soit encore, compte-tenu de l'hypothèse  $(\operatorname{tr} A)^2 = 4 \det A$  à  $a = -\frac{b}{2} \operatorname{tr} A$ .

*Conclusion :* Si  $A$  n'est pas une matrice scalaire et vérifie  $(\operatorname{tr} A)^2 = 4 \det A$ , les solutions de  $M^2 = 0$  dans  $\mathbb{A}$  sont les matrices de la forme  $b \left( \left( -\frac{\operatorname{tr} A}{2} \right) I_2 + A \right)$  avec  $b \in \mathbb{R}$ . Il existe donc dans  $\mathbb{A}$  des matrices non nulles de carré nul, donc non inversibles, par conséquent  $\mathbb{A}$  n'est pas un corps.

6. Par hypothèse,  $B$  est une matrice non scalaire de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et il existe  $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ . On en déduit que  $A$  n'est pas non plus scalaire et  $(I_2, A)$  est une base de  $\mathbb{A}$ . Définissons alors  $g$  comme l'unique application linéaire de  $\mathbb{A}$  dans  $\mathbb{B}$  telle que  $g(I_2) = I_2$  et  $g(A) = B$ . L'application  $g$  est alors bijective car est linéaire et envoie une base de  $\mathbb{A}$  sur une base de  $\mathbb{B}$ . De plus, on a  $\forall M = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$ ,  $g(M) = aI_2 + bB = aI_2 + bP^{-1}AP = P^{-1}(aI_2 + bA)P = P^{-1}MP$ . On en déduit que si  $(M, M') \in \mathbb{A}^2$ ,

$$g(M)g(M') = P^{-1}MPP^{-1}M'P = P^{-1}MM'P = g(MM')$$

ce qui achève de montrer que  $g$  est un isomorphisme d'algèbres. Par suite,  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  sont deux algèbres isomorphes.

7. Si  $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$  le discriminant du polynôme caractéristique de  $A$  est strictement positif donc  $\chi_A$  possède deux racines réelles distinctes *i.e.*  $A$  possède deux valeurs propres réelles distinctes ce qui implique sa diagonalisabilité vu que  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Soit  $B$  matrice diagonale semblable à  $A$ . D'après la question précédente,  $\mathbb{A}$  est isomorphe à  $\mathbb{B} = \operatorname{vect} \{I_2, B\}$ . Or  $\mathbb{B}$  est égal à l'espace  $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$  des matrices carrées diagonales d'ordre 2 : en effet  $\mathbb{B} \subset \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$  et  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{B}) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}_2(\mathbb{R}))$  (car  $\left( E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ ).

Dans ce cas,  $\mathbb{A}$  n'est pas un corps car si  $h$  désigne un isomorphisme de  $\mathbb{A}$  sur  $\mathbb{B} = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ ,  $h^{-1}(E_{11})$  et  $h^{-1}(E_{22})$  sont deux éléments non nuls de  $\mathbb{A}$  dont le produit est nul donc qui sont non inversibles.

## II. Quelques résultats généraux

1. Comme  $\mathbb{D}$  est une algèbre, l'application

$$\begin{aligned} \pi & : \mathbb{D}^2 & \rightarrow & \mathbb{D} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{aligned}$$

est bilinéaire : on en déduit que pour tout  $a \in \mathbb{D}$ , l'application partielle  $\phi_a = \pi(a, \cdot)$  est linéaire.

2.  $\diamond$  Toujours par bilinéarité de la multiplication dans  $\mathbb{D}$ , on a  $\forall (a, b) \in \mathbb{D}^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\phi_{\lambda a + \mu b} = \lambda \phi_a + \mu \phi_b$$

Par ailleurs, par associativité de la multiplication dans  $\mathbb{D}$ , on a  $\forall (a, b) \in \mathbb{D}^2, \phi_{ab} = \phi_a \circ \phi_b$ . Enfin, par définition de l'élément neutre pour le produit,  $\phi_{1_{\mathbb{D}}}$  est l'application identité de  $\mathbb{D}$ .

On en déduit que l'application

$$\begin{aligned} \phi & : \mathbb{D} & \rightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{D}) \\ a & \mapsto & \phi_a \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres.

Or on sait que,  $\mathcal{B}$  étant une base fixée de  $\mathbb{D}$ , l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbb{D}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}u \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres. On en déduit que  $\Psi$  est un morphisme d'algèbres comme composée des deux morphismes d'algèbres précédents. De plus, si  $\Psi(a) = 0$ , on a  $\phi_a = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{D})}$  et, en particulier  $a = \phi_a(1_{\mathbb{D}}) = 0$  donc  $\Psi$  est injectif.

$\diamond$  Comme  $\Psi$  est un morphisme d'algèbres,  $\Psi(\mathbb{D})$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ce qu'on peut redémontrer très facilement comme le réclame l'énoncé. Dans ces conditions,  $\Psi$  induit un isomorphisme de  $\mathbb{D}$  sur  $\Psi(\mathbb{D})$  donc  $\mathbb{D}$  est isomorphe à la sous-algèbre  $\Psi(\mathbb{D})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

3. Si  $\mathbb{D} = \mathbb{C}$  et  $z = a + ib$ ,  $\phi_z(1) = z = a + ib$  et  $\phi_z(i) = (a + ib)i = -b + ia$  donc si  $\mathcal{B} = (1, i)$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

4. (a) Soit  $A \in \mathbb{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui possède une valeur propre réelle  $\lambda$  et n'est pas une matrice scalaire. Alors  $A - \lambda I_n$  appartient à  $\mathbb{A}$  (car  $\mathbb{A}$  est stable par combinaisons linéaires et contient  $A$  et  $I_n$ ),  $A - \lambda I_n$  est non inversible (car  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ ) et n'est pas la matrice nulle (car  $A$  n'est pas scalaire) ce qui prouve que  $\mathbb{A}$  n'est pas un corps.

(b) Toute matrice trigonalisable (*a fortiori* diagonalisable) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  a un polynôme caractéristique scindé sur  $\mathbb{R}$  donc possède au moins une valeur propre réelle. Par suite, d'après (a), si  $\mathbb{A}$  contient une matrice non scalaire trigonalisable,  $\mathbb{A}$  n'est pas un corps.

(c) On suppose  $\mathbb{A}$  intègre et  $A \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ . D'après 1., on sait que  $\Phi_A : X \mapsto AX$  est un endomorphisme de  $\mathbb{A}$ . De plus,  $\mathbb{A}$  étant intègre et  $A$  étant non nulle,  $\text{Ker } \phi_A = \{0\}$  donc  $\phi_A$  est injectif. Comme  $\phi_A$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que  $\phi_A$  est un isomorphisme. En particulier,  $\phi_A$  est surjective donc il existe  $B \in \mathbb{A}$  telle que  $\phi_A(B) = I_n$ . La matrice  $A$  possède donc un inverse à droite, donc est inversible d'inverse  $B$  appartenant à  $\mathbb{A}$ . Tout élément non nul de  $\mathbb{A}$  possède donc un inverse dans  $\mathbb{A}$  donc  $\mathbb{A}$  est un corps.

### III. L'algèbre des quaternions

1. Comme  $A^2 = -I_n$ , on a  $(\det A)^2 = (-1)^n \in \mathbb{R}^+$  donc  $n$  est pair.
2. Remarquons que  $(AB)^2 = A(BA)B = A(-AB)B = -A^2B^2 = -I_n$ ,  $BAB = -AB^2 = A$  et  $ABA = -A^2B = B$ . On en déduit que si  $M = tI_n + xA + yB + zAB$  et  $M' = t'I_n + x'A + y'B + z'AB$  sont deux éléments de  $\mathbb{H}$ ,

$$MM' = (tt' - xx' - yy' - zz')I_n + (tx + xt' + yz' - zy')A + (ty' - xz' + yt' + zx')B + (tz' + xy' - yx' + zt')AB$$

ce qui montre que  $\mathbb{H}$  est stable pour le produit ce qui ajouté au fait qu'il est un sous-espace vectoriel contenant  $I_n$  prouve que  $\mathbb{H}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

3. D'après 2.,

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n$$

4. (a) Si  $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$  sont tels que  $tI_n + xA + yB + zAB = 0$  alors

$$(t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n = (tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = 0$$

donc  $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$  ce qui, vu que  $t, x, y, z$  sont réels impose  $t = x = y = z = 0$ . La famille  $(I_n, A, B, AB)$  est donc libre.

- (b) Si  $M$  est un élément non nul de  $\mathbb{H}$  on a donc  $M = tI_n + xA + yB + zAB$  avec  $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  donc  $M$  est inversible d'inverse  $\frac{1}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}(tI_n - xA - yB - zAB)$  appartenant à  $\mathbb{H}$  donc  $\mathbb{H}$  est un corps.

5. (a) On a  $J^2 = -I_2$  et d'après les règles de calcul des produits de matrices par blocs,

$$A^2 = \begin{pmatrix} J^2 & 0 \\ 0 & J^2 \end{pmatrix} = -I_4, \quad B^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} = -I_4$$

$$AB + BA = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} = 0$$

6. Comme  $A, B$  et  $C = AB$  sont antisymétriques, si  $M = tI_n + xA + yB + zC \in \mathbb{H}$ ,  ${}^tM = tI_n - xA - yB - zC \in \mathbb{H}$  et d'après 3.,  $M \cdot {}^tM = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_4$ . On en déduit donc que  $(\det M)^2 = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^4$ . Si  $M \neq 0$ , on a donc d'après 4.(b),

$$M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{|\det M|}} {}^tM$$

### IV. Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1. Si  $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$  et  $M = tI_n + xA + yB + zC$ ,  $M + {}^tM = 2tI_n$  donc  $M = -{}^tM$  si et seulement si  $t = 0$  ou encore  $M \in \text{vect}\{A, B, C\}$ . Or  $(A, B, C)$  est une famille libre car sous-famille de la famille libre  $(I_4, A, B, C)$ . Donc l'ensemble des quaternions purs est le sous-espace vectoriel engendré par  $(A, B, C)$  et a pour base  $(A, B, C)$ .  $\mathbb{L}$  n'est pas une sous-algèbre de  $\mathbb{H}$  car, par exemple  $A \cdot A = -I_2 \notin \mathbb{L}$  alors que  $A \in \mathbb{L}$ .
2. Soit  $M = xA + yB + zC$  et  $N = x'A + y'B + z'C$  deux éléments de  $\mathbb{L}$ . Comme  $(A, B, C)$  est une base orthonormée pour le produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ , on a  $(M | N) = xx' + yy' + zz'$ . Par ailleurs, d'après III.3.,

$$\begin{aligned} MN + NM &= (-xx' - yy' - zz')I_4 + (yz' - zy')A + (-xz' + zx')B + (xy' - yx')C \\ &\quad + (-x'y - y'y - z'z)I_4 + (y'z - z'y)A + (-x'z + z'x)B + (x'y - y'x)C \\ &= -2(xx' + yy' + zz')I_4 \end{aligned}$$

On a donc  $\frac{1}{2}(MN + NM) = -(M | N)I_4$ .

3.  $\diamond$  D'après 2., si  $M \in \mathbb{L}$ ,  $M^2 = \lambda I_4$  avec  $\lambda = -\|M\|^2 \in \mathbb{R}^-$ .  
 $\diamond$  Réciproquement, soit  $M = tI_4 + xA + yB + zC \in \mathbb{H}$  telle que  $M^2 = \lambda I_4$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^-$ . Alors, d'après III.2.,

$$M^2 = (t^2 - x^2 - y^2 - z^2)I_4 + 2txA + 2tyB + 2tzC$$

donc  $\begin{cases} tx = ty = tz = 0 \\ t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \in \mathbb{R}^- \end{cases}$ . Ces conditions imposent  $t = 0$  car sinon  $x = y = z = 0$  et alors  $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t^2 > 0$ . Donc si  $M \in \mathbb{H}$  est telle que  $M^2 = \lambda I_4$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^-$ , alors  $M \in \mathbb{L}$ .

4. Soit  $\phi$  un isomorphisme de l'algèbre  $\mathbb{H}$  dans elle-même. Si  $M \in \mathbb{L}$ , on a  $M^2 = -\|M\|^2 I_4$  donc  $\phi(M)^2 = \phi(M^2) = -\|M\|^2 \phi(I_4) = -\|M\|^2 I_4$ . On en déduit d'après 3. que  $\phi(M) \in \mathbb{L}$ . Dans ces conditions  $\phi(M)^2 = -\|\phi(M)\|^2 I_4$  donc  $-\|\phi(M)\|^2 = -\|M\|^2$  soit  $\|\phi(M)\| = \|M\|$ . Donc  $\phi$  transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme. L'endomorphisme induit par  $\phi$  sur  $\mathbb{L}$  conserve la norme donc conserve également le produit scalaire donc est un endomorphisme orthogonal de  $\mathbb{L}$ .

5. (a) Si  $M$  et  $N$  sont deux quaternions purs de même norme colinéaires, on a ou bien  $M = N$  ou bien  $M = -N$ .

Si  $M = N$  la matrice  $P = I_4$  vérifie  $P \in \mathbb{H}$ ,  $P \neq 0$  et  $M = P^{-1}NP$ .

Si  $N = -M$  la condition  $M = P^{-1}NP$  équivaut à  $PM + MP = 0$ . Dans ces conditions il suffit de prendre pour  $P$  une matrice non nulle appartenant à l'orthogonal de  $\text{vect}\{M\}$  dans  $\mathbb{L}$  : une telle matrice existe bien puisque  $(\text{vect}\{M\})^\perp$  est un plan vectoriel de  $\mathbb{L}$  et si  $P \in (\text{vect}\{M\})^\perp \setminus \{0\}$ ,  $PM + MP = -(P|M)I_4 = 0$ .

- (b) On suppose que  $M$  et  $N$  sont deux quaternions purs de même norme, non colinéaires. Alors

$$M(MN) - (MN)N = M^2N - MN^2 = (-\|M\|^2 I_4)N - M(-\|N\|^2 I_4) = \|M\|^2(M - N)$$

On a donc  $M(MN - \|M\|^2 I_4) = (MN - \|M\|^2 I_4)N$ . Dans ces conditions, si on pose  $P = MN - \|M\|^2 I_4$ , on a  $MP = PN$ ,  $P \in \mathbb{H}$  et  $P \neq 0$  car sinon on aurait  $MN = \|M\|^2 I_4 = -M^2$  ou encore  $M(N + M) = 0$  donc  $M + N = 0$  ( $M$  est inversible car élément non nul de  $\mathbb{H}$ ) ce qui est contradictoire avec le fait que la famille  $(M, N)$  soit libre. Comme  $P$  est un élément non nul de  $\mathbb{H}$ ,  $P$  est inversible et  $M = PNP^{-1}$ .

6. Telle qu'elle est formulée cette question est incorrecte ; en effet, sous la seule condition d'être non nulle et de vérifier  $MP = PN$  une matrice  $P = \alpha I_4 + Q$  avec  $Q \in \mathbb{L}$  n'est pas nécessairement telle que  $Q$  soit orthogonale à  $M$  et  $N$  (contre-exemple  $P = 0I_4 + Q$  avec  $Q = M + N$  vérifie  $MP = PN$  (si  $M$  et  $N$  sont deux éléments de même norme de  $\mathbb{L}$ ), est élément de  $\mathbb{L}$ , est non nulle et, en général,  $M + N$  n'est pas orthogonale à  $M$ ). Par contre, pour la matrice  $P$  mise en évidence dans chacun des 3 cas envisagés, on a bien la propriété souhaitée. En effet, dans le cas où  $M = N$ , on a choisi  $P = I_4$  soit  $Q = 0$  qui est bien orthogonale à  $M = N$ , si  $M = -N$ , on a choisi  $P = 0I_4 + Q$  avec  $Q$  orthogonale à  $M$  et  $N$ . Enfin, lorsque  $M$  et  $N$  sont linéairement indépendantes, la matrice  $P = MN - \|M\|^2 I_4$  se décompose en  $\alpha I_4 + Q$  avec  $Q = \frac{1}{2}(MN - NM) \in \mathbb{L}$  (en effet,  $Q$  est nécessairement la partie antisymétrique de la matrice  $P$  à savoir  $\frac{1}{2}(P - {}^tP)$  or  ${}^t(MN) = {}^tN{}^tM = (-N)(-M) = NM$ ). De plus,  $Q = \frac{1}{2}(MN - NM)$  est bien orthogonale à  $M$  et  $N$  car, par exemple  $-4(Q|M)I_4 = (MN - NM)M + M(MN - NM) = -NM^2 + M^2N$  qui est bien la matrice nulle car  $M^2 = -\|M\|^2 I_4$ .

7. Remarquons tout d'abord que  $\forall P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ , l'application  $\phi_P$  de  $\mathbb{H}$  dans lui-même qui à  $M$  associe  $P^{-1}MP$  est un isomorphisme de l'algèbre  $\mathbb{H}$ . En effet,  $\phi_P$  est bien une application de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{H}$  puisque  $\mathbb{H}$  est un corps,  $\phi_P$  est linéaire par bilinéarité du produit dans  $\mathbb{H}$ ,  $\phi_P(I_4) = P^{-1}I_4P = I_4$  et  $\phi_P(M)\phi_P(N) = (P^{-1}MP)(P^{-1}NP) = P^{-1}MNP = \phi_P(MN)$  pour tout

couple  $(M, N) \in \mathbb{H}^2$ . Enfin,  $\phi_P$  est bien bijective, de bijection réciproque égale à  $\phi_{P^{-1}}$ .

Remarquons également qu'un morphisme de l'algèbre  $\mathbb{H}$  est entièrement déterminé par les images de  $A$  et de  $B$  : en effet, si  $\phi$  est un morphisme de l'algèbre  $\mathbb{H}$ , on a pour tout  $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ ,  $\phi(tI_4 + xA + yB + zC) = tI_4 + x\phi(A) + y\phi(B) + z\phi(A)\phi(B)$ .

Soit  $\phi$  un isomorphisme de l'algèbre  $\mathbb{H}$ .

**Premier cas.** Etudions tout d'abord le cas où  $\phi(A) = A$ . On recherche donc  $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  telle que  $P^{-1}AP = A$  et  $P^{-1}BP = \phi(B)$ . D'après 4., on sait que  $\phi(B)$  est un quaternion pur de norme 1 et orthogonal à  $\phi(A) = A$  donc il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\phi(B) = \cos\theta B + \sin\theta C$ . La question 6. nous incite à chercher  $P$  sous la forme  $P = \alpha I_4 + \beta A$ . Dans ces conditions,  $P$  commute avec  $A$  donc  $P^{-1}AP = A$  et

$$BP - P\phi(B) = (\alpha(1 - \cos\theta) + \beta \sin\theta)B - (\beta(1 + \cos\theta) + \alpha \sin\theta)C$$

donc on cherche  $(\alpha, \beta)$  solution de

$$\begin{cases} \alpha(1 - \cos\theta) + \beta \sin\theta = 0 \\ \alpha \sin\theta + \beta(1 + \cos\theta) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire solution de  $\alpha \sin \frac{\theta}{2} + \beta \cos \frac{\theta}{2} = 0$ .

Posons donc par exemple,  $P = \cos \frac{\theta}{2} I_4 - \sin \frac{\theta}{2} A$ . On a alors  $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ ,  $P^{-1}AP = A = \phi(A)$  et  $P^{-1}BP = \phi(B)$  et donc d'après les deux remarques,  $\forall M \in \mathbb{H}$ ,  $\phi(M) = P^{-1}MP$ .

**Cas général.** Soit  $\phi$  un isomorphisme de l'algèbre  $\mathbb{H}$ . Alors, d'après 4., on sait que  $\phi(A)$  est un quaternion pur de même norme que  $A$  donc d'après 5., il existe  $Q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  telle que  $A = Q^{-1}\phi(A)Q$ . Si  $\phi_Q$  désigne l'application de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{H}$  telle que  $\phi_Q(M) = Q^{-1}MQ$ , alors  $\phi_Q \circ \phi$  est un isomorphisme de l'algèbre  $\mathbb{H}$  tel que  $\phi_Q \circ \phi(A) = A$  donc d'après le premier cas étudié, il existe  $R \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  tel que pour tout  $M$  de  $\mathbb{H}$ ,  $\phi_Q \circ \phi(M) = R^{-1}MR$ . En posant  $P = RQ^{-1}$ , on a  $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  et pour tout  $M$  de  $\mathbb{H}$ ,  $\phi(M) = P^{-1}MP$ .