

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES  
ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE: 4 heures

*Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

Après une première partie consacrée à l'étude de la projection sur les convexes fermés de  $\mathbb{R}^n$  on établira (dans  $\mathbb{R}^2$ ) le théorème du point fixe de Brouwer et quelques unes de ses conséquences.

On suppose que  $\mathbb{R}^n$  est muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée, notés  $(\cdot | \cdot)$  et  $\|\cdot\|$ , donc si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  sont des éléments de  $\mathbb{R}^n$  on a:  $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  et  $\|x\| = (x|x)^{1/2}$ . Si  $X$  est une partie de  $\mathbb{R}^n$  on notera  $\overset{\circ}{X}$  son intérieur, soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  on dira que  $u \in X$  est un point fixe de  $f$  si  $f(u) = u$ ; si  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f_i$  désigne la composante de rang  $i$  de  $f$ , donc  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_n(x))$ .

### I. Projection sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$

1. Démontrer que si  $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ , on a  $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$  (inégalité de Schwarz). Montrer que  $|(x|y)| = \|x\| \|y\|$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires. Montrer que si  $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^n$  vérifie:  $b \neq c$  et  $\|a - b\| = \|a - c\|$ , on a alors:  $\left\| a - \frac{b+c}{2} \right\| < \|a - b\|$ .
2. Soit  $F$  un fermé non vide de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , montrer qu'il existe  $u \in F$  tel que:  $\|x - u\| \leq \|x - y\|$  pour tout  $y \in F$   
(on supposera d'abord que  $F$  est borné avant d'étudier le cas général).
3. Soit  $A$  un convexe fermé non vide de  $\mathbb{R}^n$ , montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe un unique  $u \in A$  tel que  $\|x - u\| \leq \|x - y\|$  pour tout  $y \in A$ .

Ceci établit le théorème de projection sur les convexes de  $\mathbb{R}^n$ : soit  $A$  un convexe fermé non vide de  $\mathbb{R}^n$ , il existe une unique application, notée  $P$ , de  $\mathbb{R}^n$  dans  $A$  qui vérifie:  $\|x - P(x)\| = \min \{\|x - y\| : y \in A\}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .  $P(x)$  s'appelle la projection de  $x$  sur  $A$ .

4. Montrer que s'il existe  $\alpha \in A$  tel que:  $(x - \alpha | y - \alpha) \leq 0$  pour tout  $y \in A$ , on a:  $\alpha = P(x)$ .
5. Supposons qu'il existe  $y \in A$  tel que:  $(x - P(x) | y - P(x)) > 0$ .  
Soit alors  $\mathcal{S} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par:  $\mathcal{S}(t) = \|(x - P(x)) - t(y - P(x))\|^2$ .  
Montrer qu'il existe  $t \in ]0, 1[$  tel que:  $\mathcal{S}(t) < \|x - P(x)\|^2$ .
6. Dédire de 4. et 5. que  $u = P(x)$  si et seulement si:  $u \in A$  et  $(x - u | y - u) \leq 0$  pour tout  $y \in A$ .

7. Soit  $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n$  montrer que:  $(x - y | P(x) - P(y)) \geq \|P(x) - P(y)\|^2$ . En déduire que  $P$  vérifie les propriétés suivantes:  $P$  est continue,  $P(\mathbb{R}^n) = A$ ,  $P(x) = x$  si  $x \in A$ .
8. Montrer que si  $x \notin A$ , alors  $P(x) \notin \overset{\circ}{A}$  (raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une boule de centre  $P(x)$ , de rayon strictement positif, incluse dans  $A$ ).

## II. Théorème de Brouwer dans $\mathbb{R}^2$

Pour toute la suite du problème, on se place dans  $\mathbb{R}^2$ ; si  $r > 0$ ,  $\overline{B}(O, r)$  désigne le disque fermé de centre  $O$  et de rayon  $r$  et  $S(O, r)$  le cercle correspondant, on note  $B = \overline{B}(O, 1)$  et  $S = S(O, 1)$ . On entend par application dérivable (ou  $C^1$  ou  $C^2$ ) de  $B$  (ou de  $B \times \mathbb{R}$ ) dans  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}$ ), la restriction à  $B$  (ou à  $B \times \mathbb{R}$ ) d'une application dérivable (ou  $C^1$  ou  $C^2$ ) définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$ ), contenant  $B$  (ou  $B \times \mathbb{R}$ ), à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}$ ).

### A. Cas particulier d'une application de classe $C^2$

Soit  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ , on suppose que  $f$  est de classe  $C^2$  et que  $f(B) \subset B$  et on se propose de montrer que  $f$  possède au moins un point fixe. On va raisonner par l'absurde et supposer que:  $f(x) \neq x$  pour tout  $x \in B$ .

9. Montrer qu'il existe une application  $\rho : B \rightarrow \mathbb{R}_+$ , unique, telle que:  $x + \rho(x)(x - f(x)) \in S$  pour tout  $x \in B$ . Expliciter  $\rho$ , montrer qu'elle est de classe  $C^2$  et que  $\rho(x) = 0$  si et seulement si  $x \in S$ . On pose  $\alpha(x) = \rho(x)(x - f(x))$  et  $\alpha_{ij}(x) = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(x)$  pour tout  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$  et  $\varphi(x) = x + \alpha(x)$ .

10. Montrer que, pour tout  $x \in B$ , la matrice  $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$  est singulière (on pourra, à cet effet, caractériser géométriquement l'image de l'application linéaire correspondante).

11. Soit  $\psi : B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par:  $\psi(x, t) = \begin{vmatrix} 1 + t\alpha_{11}(x) & t\alpha_{21}(x) \\ t\alpha_{12}(x) & 1 + t\alpha_{22}(x) \end{vmatrix}$ .

- (a) Montrer que:  $\psi(x, t) = 1 + t\beta(x) + t^2\gamma(x)$  où  $\beta$  et  $\gamma$  sont des applications continues de  $B$  dans  $\mathbb{R}$  que l'on explicitera à l'aide des applications  $(\alpha_{ij})_{(i,j) \in \{1,2\}^2}$ . Vérifier que  $\psi(x, 1) = 0$  pour tout  $x \in B$ .

- (b) Soit  $J : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $J(t) = \iint_B \psi(x, t) dx_1 dx_2$ . Justifier l'existence de  $J$  et calculer  $J(0)$  et  $J(1)$ .

- (c) Montrer, grâce au théorème de Fubini, que  $\iint_B \beta(x) dx_1 dx_2 = 0$ .

(d) Soit  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$ ;

$$\text{soient } I_1(g) = \iint_B \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) dx_1 dx_2, \quad I_2(g) = \iint_B \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) dx_1 dx_2.$$

Montrer que:

$$\begin{aligned} I_1(g) &= \int_{-1}^{+1} \left[ g_1(\sqrt{1-s^2}, s) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\sqrt{1-s^2}, s) - g_1(-\sqrt{1-s^2}, s) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(-\sqrt{1-s^2}, s) \right] ds \\ &\quad - \iint_B g_1(x) \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

On obtient alors, de façon analogue:

$$\begin{aligned} I_2(g) &= \int_{-1}^{+1} \left[ g_1(s, \sqrt{1-s^2}) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(s, \sqrt{1-s^2}) - g_1(s, -\sqrt{1-s^2}) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(s, -\sqrt{1-s^2}) \right] ds \\ &\quad - \iint_B g_1(x) \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2 \partial x_1}(x) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Montrer que:  $\iint_B \gamma(x) dx_1 dx_2 = 0$  et donc, que  $J$  est constante; montrer que ceci est impossible.

On a ainsi démontré le théorème de Brouwer particulier: toute application de classe  $C^2$ , de  $B$  dans  $B$ , a au moins un point fixe.

## B. Forme générale du théorème de Brouwer

On admettra la généralisation suivante du théorème de Weierstrass: soit  $F$  un fermé borné non vide de  $\mathbb{R}^2$ , soit  $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $g$  est continue, il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , une application  $g_{(\varepsilon)}$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ , telle que:  $\sup \{ |g_{(\varepsilon)}(x) - g(x)| : x \in F \} \leq \varepsilon$ .

12. Montrer que si  $F$  est un fermé borné non vide de  $\mathbb{R}^2$ , et si  $g : F \rightarrow \mathbb{R}^2$  est continue, il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$  une application  $g_{(\varepsilon)}$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , de classe  $C^2$ , telle que:  $\sup \{ \|g_{(\varepsilon)}(x) - g(x)\| : x \in F \} \leq \varepsilon$ .

13. Soit  $f : B \rightarrow B$ ,  $f$  continue. Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe, d'après 12. une application  $f_{(\varepsilon)}$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , de classe  $C^2$ , telle que:  $\sup \{ \|f_{(\varepsilon)}(x) - f(x)\| : x \in B \} \leq \varepsilon$ .

$$\text{Soit } h_{(\varepsilon)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad h_{(\varepsilon)}(x) = \frac{f_{(\varepsilon)}(x)}{1 + \varepsilon}.$$

Montrer que  $h_{(\varepsilon)}(B) \subset B$  et que:  $\sup \{ \|h_{(\varepsilon)}(x) - f(x)\| : x \in B \} \leq 2\varepsilon$ .

14. Montrer que si  $f : B \rightarrow B$  est continue, elle possède au moins un point fixe.

15. Soit  $r > 0$ , soit  $f : \overline{B}(O, r) \rightarrow \overline{B}(O, r)$ , montrer que si  $f$  est continue, elle possède au moins un point fixe (considérer  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(x) = \frac{1}{r}f(rx)$ ).

16. Soit  $A$  un convexe fermé borné non vide de  $\mathbb{R}^2$ , soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f$  continue telle que:  $f(A \setminus \overset{\circ}{A}) \subset A$ .
- (a) Montrer qu'il existe  $r > 0$  tel que:  $A \cup f(A) \subset \overline{B}(O, r)$ .
- (b) On associe au convexe fermé non vide  $A$  la projection  $P$ , comme cela a été défini en question 3. Soit alors  $h : \overline{B}(O, r) \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $h(x) = f(P(x))$ . Dédurre de l'étude de  $h$  que  $f$  possède au moins un point fixe dans  $A$ . On a donc le théorème de Brouwer général: si  $A$  est un convexe fermé borné non vide de  $\mathbb{R}^2$ , et si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  est continue et vérifie:  $f(A \setminus \overset{\circ}{A}) \subset A$ , alors  $f$  possède au moins un point fixe dans  $A$ .

### III. Quelques conséquences du théorème de Brouwer

17. Soit  $f : B \rightarrow S$ , telle que:  $f(x) = x$  pour tout  $x \in S$ . Montrer, en étudiant  $(-f)$ , que  $f$  ne peut être continue (ceci constitue le théorème de non rétraction).
18. Soit  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que:  $f$  continue et  $f(x) = x$  pour tout  $x \in S$ . Soit alors  $y \notin f(B)$ , montrer, en étudiant  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par:  $g(x) = \frac{y - f(x)}{\|y - f(x)\|}$ , que  $y \notin B$ . En déduire que:  $B \subset f(B)$ .
19. Soit  $h : S \times [0, 1] \rightarrow S$  telle que:  $h$  est continue et  $h(x, 0) = x$  pour tout  $x \in S$ . Supposons qu'il existe  $y \in S$  tel que:  $h(x, 1) = y$  pour tout  $x \in S$ ; soit alors  $f$ , de  $B$  dans  $S$ , définie par:
- $$f(x) = \begin{cases} h\left(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\right) & \text{si } x \neq O \\ y & \text{si } x = O \end{cases}.$$
- Montrer que  $f$  est continue et que cela contredit le théorème de non rétraction: en déduire que  $(x \rightarrow h(x, 1))$  ne peut être constante (on dit que  $S$  n'est pas contractile).
20. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que:  $f$  continue,  $(f(x) | x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$ . Soit  $y \in \mathbb{R}^2$ , soit  $r > 0$ , on définit, si  $y \notin f(\overline{B}(O, r))$ , l'application  $g_{(r)} : \overline{B}(O, r) \rightarrow \mathbb{R}^2$  par:
- $$g_{(r)}(x) = r \frac{y - f(x)}{\|y - f(x)\|}.$$
- (a) Montrer qu'il existe  $u_{(r)} \in S(O, r)$  tel que l'on ait:  $(f(u_{(r)}) | u_{(r)}) = (y | u_{(r)}) - r \|y - f(u_{(r)})\|$ .
- (b) Montrer que  $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ .

**Fin de l'énoncé.**