

1 Centrale MP Math 1 2000

Partie I - La méthode de Newton pour les polynômes réels

P est un **polynôme** non constant donc P' n'est pas identiquement nul :

$\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid P'(x) \neq 0\}$ est un ouvert de \mathbb{R} , succession finie d'intervalles ouverts.

I.A - L'équation de la tangente en $(x, P(x))$ au graphe de P est : $Y = P(x) + P'(x) \cdot [X - x]$

Pour $x \in \Omega$, elle coupe l'axe des x au point d'abscisse X telle que : $P(x) + P'(x) \cdot [X - x] = 0$

d'où : $\forall x \in \Omega, N_P(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$

I.B.1) - N_P fraction rationnelle, est de classe C^∞ sur Ω , et $N'_P(x) = \frac{P''(x)P(x)}{[P'(x)]^2}$ sur Ω

I.B.2) - Si $P(a) = 0$ et $P'(a) \neq 0$, a est un zéro simple de P , et on a : $\begin{cases} N_P(a) = a \\ N'_P(a) = 0 \end{cases}$

a est un point fixe super attractif de N_P .

Si a est un zéro d'ordre $p \geq 2$ de P , on peut factoriser : $P(x) = [x - a]^p \cdot Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $Q(a) \neq 0$

ainsi : $\begin{cases} P'(x) = p[x - a]^{p-1} \cdot Q(x) + [x - a]^p \cdot Q'(x) \\ P''(x) = p(p-1)[x - a]^{p-2} \cdot Q(x) + 2p[x - a]^{p-1} \cdot Q'(x) + [x - a]^p \cdot Q''(x) \end{cases}$

d'où : $\forall x \in \Omega, N_P(x) = x - \frac{[x - a] \cdot Q(x)}{p \cdot Q(x) + [x - a] \cdot Q'(x)}$

et $N'_P(x) = \frac{[p(p-1) \cdot Q(x) + 2p[x - a] \cdot Q'(x) + [x - a]^2 \cdot Q''(x)] \cdot (x - a) \cdot Q(x)}{[p \cdot Q(x) + [x - a] \cdot Q'(x)]^2}$

Les deux fonctions ont une limite finies : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} N_P(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow a} N'_P(x) = \frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p} \end{cases}$, N_P étant C^∞ au voisinage de a .

N_P est prolongeable par continuité en a , son prolongement par continuité est dérivable en a , et même C^1 en a .

On le note encore $N_P : N'_P(a) = 1 - \frac{1}{p}$ a est un point fixe attractif de N_P de multiplicateur $1 - \frac{1}{p}$

I.C - On a $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega$ et $x_{n+1} = N_P(x_n)$ Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(x_n) = P'(x_n) \cdot [x_n - x_{n+1}]$

Si la suite est bien définie et tend vers a , en passant à la limite, par continuité de P et P' $P(a) = 0$

I.D.1) - Si on note encore p l'ordre de a comme zéro de P : N_P est C^1 au voisinage de a et $N'_P(a) = 1 - \frac{1}{p}$

Donc : $\exists \varepsilon > 0, \forall c \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \quad |N'_P(c)| \leq 1 - \frac{1}{2 \cdot p} < 1$

N_P est ainsi **strictement contractante** sur un **fermé** de \mathbb{R} complet, par le théorème du point fixe : toutes les suites récurrentes pour $x_0 = y \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ convergent vers a l'unique point fixe de N_P dans ce fermé.

I.D.2) - L'ensemble fermé des points dont la suite de Newton par P converge vers a contient $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Définissons : $N^+(a) = \{x \geq a \mid \forall y \in [a, x], \text{ la suite de Newton de } y \text{ par } P \text{ converge vers } a\}$

$N^+(a)$ est un **intervalle** contenant a . Soit $\beta = \sup(N^+(a))$

Si l'ensemble $N^+(a)$ est **borné**, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \geq a + \varepsilon$

Supposons $\beta \in N^+(a)$, la suite de Newton de β converge vers a et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tel que $\beta_{n_0} = (N_P)^{n_0}(\beta) \in]a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}[$, mais alors $(N_P)^{n_0}$ est continue au voisinage de β

et donc pour y assez proche de β , et supérieur à β , $y_{n_0} = (N_P)^{n_0}(y) \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$

la suite converge donc ensuite vers a , et il existerait des éléments de $N^+(a)$ strictement supérieur à β

Absurde : $N^+(a) = [a, \beta[$ Si $N^+(a)$ **n'est pas borné** alors : $N^+(a) = [a, \infty[$

De même à gauche de a :

le **bassin immédiat** $I(a) = N^-(a) \cup N^+(a)$ de a est un intervalle ouvert de \mathbb{R}

I.E.1) - P'' ne s'annule pas sur $] - \infty, \xi[$, **supposons** $P'' > 0$ sur $] - \infty, \xi[$

alors P' croît strictement vers 0 sur $] - \infty, \xi[$ donc $P' < 0$ sur $] - \infty, \xi[$ et P décroît strictement de $+\infty$

jusqu'à $P(\xi)$ en passant par $P(a^-) = 0$ $P > 0$ sur $] - \infty, a^-[$ et $P < 0$ sur $] a^-, \xi[$

Pour tout $x \in]-\infty, \xi[$ par Taylor-Lagrange, il existe $c \in]a^-, x[$ tel que :

$$P(a) = P(x) + [a - x] P'(x) + \frac{1}{2} [a - x]^2 P''(c)$$

$$N_P(x) - a = x - a - \frac{P(x)}{P'(x)} = \frac{P'(x)[x - a] - P(x) + P(a)}{P'(x)} = \frac{P''(c)[x - a]^2}{2.P'(x)} < 0$$

Quelque soit le point de départ $x_0 \in]-\infty, \xi[$, le premier terme x_1 est dans $]-\infty, a^-[$,

et les autres termes de la suite resteront majorés par a^- , la suite est bien définie.

De plus $\forall x \in]-\infty, a^-[$ $N_P(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)} > x$ et la suite est donc croissante à partir de x_1 .

Par croissance majorée, $\forall x_0 \in]-\infty, \xi[$ la suite converge vers une limite ℓ et on a $\ell \leq a^-$

et où par continuité : $N_P(\ell) = \ell$. Avec I.C : $P(\ell) = 0$ donc : $\ell = a^-$

Le bassin immédiat de a^- contient donc $]-\infty, \xi[$ mais ne peut contenir ξ où la suite n'est pas définie.

donc : le bassin immédiat de a^- égale donc $]-\infty, \xi[$

Il en est de même dans le cas $P'' < 0$ sur $]-\infty, \xi[$

I.E.2) Le bassin immédiat de a est à extrémités réelles : $I(a) =]\alpha, \beta[$

• Avec I.D.2) : $I(a) = \{x / \forall y \in [a, x], \text{ la suite de Newton de } y \text{ par } P \text{ converge vers } a\}$

Supposons que $x \in I(a)$ et que $N_P(x) \notin I(a)$ alors il existe z dans $[a, N_P(x)]$ tel que la suite de Newton de z par P ne converge pas vers a . Mais $z \in [N_P(a), N_P(x)]$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y \in [a, x]$ tel que $z = N_P(y)$. La suite de Newton de y suit alors celle de z , elle ne converge pas vers a . Contradiction sur $x \in I(a)$.

Donc : $N_P(] \alpha, \beta[) \subset] \alpha, \beta[$

Note : si $y = N_P(x)$ la suite de Newton de $y = x_1$ est obtenue par simple décalage à partir de celle de x
 $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1}$ elle est donc définie et convergente vers la même limite a .

• Si $P(\alpha) = 0$ puisque $P(a) = 0$ avec le théorème de Rolle : $\exists \xi \in]\alpha, a[\subset]\alpha, \beta[$ tel que $P'(\xi) = 0$
 La suite de Newton de ξ n'est alors pas définie et cela contredit la définition du bassin immédiat.

De même si $P(\beta) = 0$

Si $P'(\alpha) = 0$, puisque $P(\alpha) \neq 0$, par continuité de P et P' quand $x \rightarrow \alpha^+$ $|N_P(x)| \rightarrow \infty$
 l'abscisse du point d'intersection de la tangente avec Ox part à l'infini et donc $N_P(x) \notin]\alpha, \beta[$

De même si $P'(\beta) = 0$ ainsi $P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) \neq 0$

• Il n'y a aucun autre zéro de P que a sur $[\alpha, \beta]$ (toujours avec Rolle) et P' ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$, sauf peut-être en a (zéro d'ordre $p \geq 2$), par continuité elle reste non nulle sur un voisinage de α , et sur un voisinage de β .

Il existe alors $\eta > 0$ tel que N_P soit C^1 (au moins) sur un intervalle $]\alpha - \eta, \beta + \eta[$

avec un seul problème éventuel en a . Donc : $N_P(\alpha) \in]\alpha, \beta[$ par continuité.

Mais si $N_P(\alpha) \in]\alpha, \beta[$, la suite de Newton de $N_P(\alpha)$ serait bien définie et convergerait vers a celle de α aussi (simple décalage) donc $\alpha \in]\alpha, \beta[$ absurde . D'où $N_P(\alpha) = \alpha$ ou β

$N_P(\alpha) = \alpha$ en un point α où $P'(\alpha) \neq 0$ entrainerait $P(\alpha) = 0$ qu'on a exclu. $N_P(\alpha) = \beta$

De même $N_P(\beta) = \alpha$ Les extrémités du bassin immédiat d'un zéro de P constituent un 2-cycle.

• Si ce 2-cycle était attractif : en notant $M_P = N_P \circ N_P$ on aurait $M_P(\alpha) = \alpha$ et $M_P'(\alpha) < 1$
 M_P étant C^1 au voisinage de α , elle resterait strictement contractante sur un $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ où $\varepsilon > 0$
 Pour $x \in]\alpha, \alpha + \varepsilon[$ la suite extraite de la suite de Newton $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergerait vers α , ce qui contredit

la définition de $I(a) =]\alpha, \beta[$ puisque $x_n \rightarrow a$. Ce 2-cycle ne peut être attractif.

I.F - On a : $\beta - \alpha = -\frac{P(\alpha)}{P'(\alpha)}$ et $\alpha - \beta = -\frac{P(\beta)}{P'(\beta)}$ avec $P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) \neq 0$

$\frac{P(\alpha)}{P'(\alpha)}$ et $\frac{P(\beta)}{P'(\beta)}$ sont de signes opposés, $P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) < 0$

N_P est C^1 (au moins) sur un intervalle $]\alpha - \eta, \beta + \eta[$ et pour $x > \alpha$ $\frac{N_P(x) - N_P(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{N_P(x) - \beta}{x - \alpha} < 0$

par passage à la limite quand $x \rightarrow \alpha^+$ on assure : $N_P'(\alpha) \leq 0$. Mais $N_P'(\alpha) = 0$ rendrait le 2-cycle

(α, β) super-attractif, ce qu'il n'est pas : $N_P'(\alpha) < 0$ De même : $\frac{N_P(\beta) - N_P(x)}{\beta - x} = \frac{\alpha - N_P(x)}{\beta - x} < 0$

et $N_P'(\beta) < 0$ D'où : $P(\alpha)P''(\alpha)P(\beta)P''(\beta) > 0$

• **Premier cas** : si P' ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$ (elle ne pourrait s'annuler qu'en a)

$P'(\alpha)$ et $P'(\beta)$ ont même signe, $P'(\alpha)P'(\beta) > 0$ d'où $P(\alpha)P(\beta) < 0$ et $P''(\alpha)P''(\beta) < 0$

il existe $c \in]\alpha, \beta[$ où $P''(c) = 0$

- **Second cas** : si P' s'annule sur $[\alpha, \beta]$ elle ne s'annule qu'en a :

$N'_P(\alpha) < 0$ alors que $N'_P(a) = \frac{p-1}{p} > 0$ il existe $c \in]\alpha, a[$ où $N'_P(c) = 0$ donc $P''(c) = 0$

I.G - P admet $d = d^\circ(P)$ racines réelles distinctes ordonnées : $(a_k)_{1 \leq k \leq d}$. Entre deux zéros successifs de P

il existe un zéro de P' qui admet donc $d-1$ racines réelles distinctes : $(\xi_k)_{1 \leq k \leq d-1}$ avec $\xi_k \in]a_k, a_{k+1}[$ de même P'' admet $d-2$ racines réelles distinctes : $(\zeta_k)_{1 \leq k \leq d-2}$ où $\zeta_k \in]\xi_k, \xi_{k+1}[$

Le bassin immédiat de $a_1 = a^-$ est $]-\infty, \xi_1[$ et ne contient pas de zéros de P'' , de même celui de $a_d = a^+$

Pour $k \in \{1, \dots, d-2\}$ le bassin immédiat de a_{k+1} est de la forme $]\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}[$, ne contient pas de racine de P'

(P n'a pas de racines multiples) mais contient une racine de P'' : $\zeta_k \in]\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}[\subset]\xi_k, \xi_{k+1}[$

N_P attire tout zéro P'' vers un zéro de P

Partie II - Etude algébrique

II.A - Pour $d = 1$ $N_P(X) = R(X) = -\frac{p_1}{p_0}$ pour $P(X) = p_1X + p_0$ et (*) n'est pas vraie : $d^\circ(Q) = d-1$

On supposera donc $d \geq 2$ et $P(X) = p_dX^d + \dots + p_1X + p_0$

ainsi le terme de plus haut degré de $Q(X) = XP'(X) - P(X)$ vaut $(d-1)p_dX^d$ et $d^\circ(Q) = d$
 $S = P'$ est de degré $d^\circ(S) = d-1$

$PGCD(Q, S) = PGCD(P, P') = 1$ puisque P a d racines simples dans \mathbb{C} .

$R(z) = z$ et $R'(z) = \frac{P(z)P''(z)}{[P'(z)]^2} = 0$ pour une racine de P R vérifie (*)

II.B - Notons $(z_k)_{1 \leq k \leq d}$ les points fixes de R et P le polynôme : $P(X) = \prod_{1 \leq k \leq d} (X - z_k)$

La fraction rationnelle $R(X) - X = \frac{Q(X) - X.S(X)}{S(X)}$ s'annule sur les $(z_k)_{1 \leq k \leq d}$ distincts, son numérateur

aussi, et $d^\circ(Q(X) - X.S(X)) \leq d$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Q(X) - X.S(X) = \lambda.P(X)$

et $\lambda \neq 0$ car sinon $PGCD(Q, S) = S$

Alors : $R(X) = X + \frac{\lambda.P(X)}{S(X)}$ et $R'(X) = 1 + \lambda \cdot \frac{P'(X)S(X) - S'(X)P(X)}{[S(X)]^2}$ est nul sur les $(z_k)_{1 \leq k \leq d}$

$\lambda \cdot [P'(X)S(X) - S'(X)P(X)] + [S(X)]^2$ est nul sur les $(z_k)_{1 \leq k \leq d}$ distincts, et dans $\mathbb{C}_{2d-2}[X]$

C'est donc un multiple de $P(X)$, avec un quotient $U(X)$ dans $\mathbb{C}_{d-2}[X]$

ainsi avec $Q - X.S = \lambda.P$ $\lambda \cdot [\lambda.P'S - S'(Q - X.S)] + \lambda.S^2 = U \cdot [Q - X.S]$

d'où : $[\lambda.S + \lambda^2.P' + \lambda.X.S' + X.U]S = [U + \lambda.S']Q$

mais $PGCD(Q, S) = 1$ donc S de degré $d-1$ divise $[U + \lambda.S']$ de $\mathbb{C}_{d-2}[X]$

d'où : $U + \lambda.S' = 0$ et $\lambda.S + \lambda^2.P' = 0$ d'où $S = -\lambda.P'$

Ainsi : $R(X) = X + \frac{P(X)}{P'(X)}$ pour $P(X) = \prod_{1 \leq k \leq d} (X - z_k)$

II.C - $a \neq 0$ la fonction réciproque de T est définie sur \mathbb{C} par $T^{-1}(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$ c'est aussi une similitude.

Remarque : la relation de similitude est une **relation d'équivalence** (réflexive, symétrique et transitive)

Notons : $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid P'(z) \neq 0\}$ c'est le domaine de définition de N_P (aux pôles multiples près)

Le polynôme $P \circ T$ est définie par $P \circ T(X) = P(a.X + b)$ et donc $(P \circ T)'(X) = a.P'(a.X + b)$

ainsi sur $\mathcal{D}' = T^{-1}(\mathcal{D})$

$T \circ N_P \circ T(z) = a \cdot \left[z - \frac{P(a.z + b)}{a.P'(a.z + b)} \right] + b = (a.z + b) - \frac{P(a.z + b)}{P'(a.z + b)} = N_P(a.z + b)$

donc : $T \circ N_P \circ T = N_P \circ T$ ainsi $N_{P \circ T}$ et N_P sont semblables

II.D - Remarquons que $\forall \lambda \neq 0 \quad N_{\lambda.P} = N_P$

- Pour $Q_1(X) = X^2$ on a : $N_{Q_1}(X) = \frac{X}{2}$

Pour $Q_2(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ on a : $N_{Q_2}(X) = \frac{X}{2} + \frac{1}{2X}$

- Si P est un polynôme de degré 2, $P(X) = \alpha.X^2 + \beta.X + \gamma$ où $\alpha \neq 0$
il admet dans \mathbb{C} $\begin{cases} \text{premier cas : une racine double } z_1 & P(X) = \alpha.(X - z_1)^2 \\ \text{second cas : deux racines distinctes } z_1 \text{ et } z_2 & P(X) = \alpha.(X - z_1)(X - z_2) \end{cases}$

Dans le premier cas : $T(z) = z + z_1$ est une similitude, et $P \circ T(X) = \alpha.Q_1(X)$

N_P est semblable à $N_{P \circ T} = N_{\alpha.Q_1} = N_{Q_1}$ associée à la fraction rationnelle : $\frac{X}{2}$

Dans le second cas : on cherche T qui envoie le couple $(1, -1)$ sur (z_1, z_2) soit $\begin{cases} a + b = z_1 \\ -a + b = z_2 \end{cases}$

Si l'on prend : $a = \frac{1}{2}[z_1 - z_2]$ et $b = \frac{1}{2}[z_1 + z_2]$ et $T(X) = a.X + b$

alors : $P \circ T(X) \in \mathbb{C}_2[X]$, $P \circ T(1) = P(z_1) = 0$ $P \circ T(-1) = P(z_2) = 0$

et son coefficient dominant vaut $\alpha.a^2 \neq 0$ d'où : $P \circ T(X) = \alpha.a^2.Q_2(X)$

N_P est semblable à $N_{P \circ T} = N_{\alpha.a^2.Q_2} = N_{Q_2}$ associée à la fraction rationnelle : $\frac{X}{2} + \frac{1}{2.X}$

II.E - Posons : $P(X) = \alpha.X^3 + \beta.X^2 + \gamma.X + \delta$ où $\alpha \neq 0$

Premier cas : P admet une racine triple z_1 $P(X) = \alpha.(X - z_1)^3$

$T(z) = z + z_1$ est une similitude, et $P \circ T(X) = \alpha.X^3$

N_P est semblable à $N_{P \circ T} = N_{\alpha.X^3} = N_{X^3}$ associée à la fraction rationnelle : $\frac{2.X}{3}$

Deuxième cas : P admet une racine double z_1 et une simple z_2 $P(X) = \alpha.(X - z_1)^2(X - z_2)$

On peut choisir $a = \frac{1}{3}[z_1 - z_2]$ et $b = \frac{1}{3}[2.z_1 + z_2]$ et $T(X) = a.X + b$ alors $T(1) = z_1$ et

$T(-2) = z_2$ d'où : $P \circ T(1) = 0$ $P \circ T(-2) = 0$ et $(P \circ T)'(1) = a.P'(z_1) = 0$

d'où : $P \circ T(X) = \alpha.a^3.P_{-2}(X) = \alpha.a^3.(X - 1)^2(X + 2) = \alpha.a^3.[X^3 - 3.X + 2]$

N_P est semblable à $N_{P \circ T} = N_{\alpha.a^3.P_{-2}} = N_{-2}$ égale à $\frac{2.(X^3 - 1)}{3(X^2 - 1)} = \frac{2}{3} \left[\frac{X^2 + X + 1}{X + 1} \right]$ **Troisième**

cas : P admet trois racines simples : z_1, z_2 et z_3

Il n'y a pas de similitude appliquant les racines $(1, u_2, u_3)$ de P_m sur les racines (z_1, z_2, z_3) de P une similitude conserve les angles, et ces deux triangles n'ont pas, a priori, les mêmes angles.

Cherchons brutalement s'il existe $(a, b, m, \lambda) \in \mathbb{C}^4$ tels que $P_m \circ T = \lambda.P$ ($a \neq 0$ et $\lambda \neq 0$)
 $a^3.X^3 + 3a^2b.X^2 + [3ab^2 + a(m - 1)].X + [b^3 + b(m - 1) - m] = \lambda[\alpha.X^3 + \beta.X^2 + \gamma.X + \delta]$

d'où : $\lambda = \frac{a^3}{\alpha}$, $b = \frac{a\beta}{3\alpha}$, $m = 1 + a^2 \left[\frac{3\alpha\gamma - \beta^2}{3\alpha^2} \right]$ avec les trois premières relations

dans la 4^{ième} a doit vérifier : $a^3 [27\alpha^2\delta + 2\beta^3 - 9\alpha\beta\gamma] + 9a^2\alpha [3\alpha\gamma - \beta^2] + 27\alpha^3 = 0$

ce qui est possible car $[27\alpha^2\delta + 2\beta^3 - 9\alpha\beta\gamma]$ et $\alpha [3\alpha\gamma - \beta^2]$ ne sont pas simultanément nuls

puisque l'unique racine de P'' qui vaut $\zeta = -\frac{\beta}{3\alpha}$ n'est pas racine de P et P' simultanément.

On peut donc trouver (a, b, m, λ) convenables ($a \neq 0$ et $\lambda \neq 0$) et N_P est semblable à N_m

II.F - Les suites récurrentes définies par $\begin{cases} x_0 = z \in \mathbb{C} \text{ donné et} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = R(x_n) \end{cases}$ de deux fractions rationnelles

R et S semblables, se correspondent par similitude :

si $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = T^{-1}(x_n)$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1} = T^{-1} \circ R \circ T(y_n) = S(y_n)$

Donc leur comportement dynamique : convergence, cycles, attractivité etc... se conservent.

Pour étudier **tous les comportements dynamiques** des suites de Newton des polynômes de $\mathbb{C}_3[X]$,

il suffit d'étudier ceux des suites récurrentes associées aux fonctions :

$z \mapsto \frac{z}{2}$, $z \mapsto \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$, $z \mapsto \frac{2z}{3}$ et pour $m \in \mathbb{C}$ $z \mapsto \frac{2z^3 + m}{3z^2 + m - 1}$

Partie III - Étude analytique du cas cubique réel

III.A.1) - $z_1 = 1$ est racine apparente de $P_m(X) = (X - 1)(X^2 + X + m)$ qui aura donc trois racines complexes distinctes, si et seulement si

(1 n'est pas racine de $(X^2 + X + m)$) et ($(X^2 + X + m)$ n'a pas de racine double)

si et seulement si $(m \neq -2)$ et $(m \neq \frac{1}{4})$

III.A.2) - Pour $m > 1$ la dérivée $P'_m(x) = 3.x^2 + m - 1$ reste strictement positive sur \mathbb{R} .

P_m est donc **strictement croissante** sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'une fois en $x = 1$. ($1 - 4m < 0$)
 N_m est donc C^∞ sur \mathbb{R} et $N'_m(x) = \frac{P''_m(x)P_m(x)}{[P'_m(x)]^2} = \frac{6x(x-1)(x^2+x+m)}{[3x^2+m-1]^2}$ du signe de $x(x-1)$

D'où le tableau de variations de N_m :

De plus $N_m(x) - x = \frac{(1-x)(x^2+x+m)}{3x^2+m-1}$
 est du signe de $(1-x)$
 et ne s'annule qu'en $x = 1$

| | | | | | | | |
|-----------|-----------|------------|-----------------|------------|-----|------------|----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 1 | ∞ | | | |
| $N'_m(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | | |
| $N_m(x)$ | $-\infty$ | \nearrow | $\frac{m}{m-1}$ | \searrow | 1 | \nearrow | ∞ |

$\boxed{\ell = 1}$ est la **seule limite éventuelle possible** des suites de Newton de P_m (N_m continue sur \mathbb{R})

L'intervalle $[1, \infty[$ est **stable** :

- si $x_{n_0} \in [1, \infty[$ la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ est alors décroissante ($x_{n+1} - x_n = N_m(x_n) - x_n < 0$)
 et minorée par 1 ($x_n \in [1, \infty[\implies x_{n+1} = N_m(x_n) \in [1, \infty[$). Elle converge vers $\ell = 1$.
- si $x = x_0 \in]-\infty, 1[$ la suite est d'abord croissante ($x_{n+1} - x_n = N_m(x_n) - x_n > 0$) .
 si elle reste majorée par 1, elle reste croissante et majorée : elle converge vers $\ell = 1$
 si elle dépasse 1 le raisonnement précédent assure le même résultat.

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ la suite de Newton de } x \text{ converge vers } \ell = 1}$

III.B.1) - Le discriminant de $x^2 + x + m$ vaut $1 - 4m$

- Si $m' < \frac{1}{4}$

$x^2 + x + m = 0$ admet deux racines réelles distinctes : $a_{m'} \in \left] \frac{-1}{2}, \infty \right[$ et $b_{m'} \in \left] -\infty, \frac{-1}{2} \right[$

$$\boxed{a_{m'} = \frac{-1}{2} [1 - \sqrt{1 - 4m'}] \text{ et } b_{m'} = \frac{-1}{2} [1 + \sqrt{1 - 4m'}]}$$

La seule qui puisse être égale à 1 est ($a_{m'} = 1$) $\iff (1 - \sqrt{1 - 4m'} = -2) \iff (m' = -2)$

Si $m' < \frac{1}{4}$ et $m' \neq -2$: P_m possède trois racines réelles distinctes $1, a_{m'}, b_{m'}$

- Soit $m' < 0$ la fraction rationnelle : $N_{m'}(z) = \frac{2z^3 + m'}{3z^2 + m' - 1}$ est définie sur $\mathcal{D}_{m'} = \mathbb{C} \setminus \{x_0^-, x_0^+\}$

avec $x_0^+ = \sqrt{\frac{1 - m'}{3}}$ et $x_0^- = -x_0^+$

On cherche $a \neq 0, b$ et $m \in]0, \frac{1}{4}[$ tels que **(**)** $\boxed{\forall z \in \mathcal{D}_{m'} \quad a.N_{m'}(z) + b = N_m(az + b)}$

La similitude doit d'abord conserver les **pôles** des deux fractions rationnelles :

$$\left. \begin{array}{l} \left(a\sqrt{\frac{1-m'}{3}} + b = \sqrt{\frac{1-m}{3}}, -a\sqrt{\frac{1-m'}{3}} + b = -\sqrt{\frac{1-m}{3}} \right) \\ \text{ou } \left(a\sqrt{\frac{1-m'}{3}} + b = -\sqrt{\frac{1-m}{3}}, -a\sqrt{\frac{1-m'}{3}} + b = \sqrt{\frac{1-m}{3}} \right) \end{array} \right\} \text{d'où } \left\{ \begin{array}{l} \boxed{b = 0} \\ \boxed{a = \pm \sqrt{\frac{1-m}{1-m'}}} \end{array} \right.$$

Puis pour $z^3 = -\frac{m'}{2}$: $a.N_{m'}(z) + b = 0$ donc $2(az)^3 + m = 0$ d'où : $\boxed{a^3 = \frac{m}{m'}}$ et a réel.

ainsi : $\boxed{m = 1 + a^2m' - a^2 = a^3m'}$ sont des conditions **nécessaires**.

Or **(**)** équivaut à : $a(2X^3 + m')(3(aX)^2 + m - 1) = (2(aX)^3 + m)(3X^2 + m' - 1)$

donc à $2a(m-1) = 2a^3(m'-1)$, $3a^3m' = 3m$ et $am'(m-1) = m(m'-1)$

Nos conditions nécessaires sont **suffisantes**.

On obtient : $a^3m' + a^2(1 - m') - 1 = (a-1)(a^2m' + a + 1) = 0$ et **trois possibilités** pour a :

- $a = 1$ avec $b = 0$ donne $m = m'$ **sans intérêt**.
- $a = \frac{-1}{2m'} [1 - \sqrt{1 - 4m'}] = \frac{-2}{1 + \sqrt{1 - 4m'}}$ parcourt $\left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$ quand $m' \in]-\infty, -2[$
 et parcourt $\left] -1, -\frac{1}{2} \right[$ quand $m' \in]-2, 0[$ et donne $m = 1 + a^2m' - a^2 = -(a + a^2)$
 $-(a + a^2)$ de dérivée $-(2a + 1)$ est croissante sur $\left] -1, -\frac{1}{2} \right[$ et décroissante sur $\left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$
 donc m croît de 0 à $\frac{1}{4}$ puis décroît de $\frac{1}{4}$ à 0 il reste dans $\left] 0, \frac{1}{4} \right[$ donc **convient**
- $a = \frac{-1}{2m'} [1 + \sqrt{1 - 4m'}]$ qu'on laisse inutile.

Pour $m' < 0$ et $m' \neq -2$ il existe $m \in]0, \frac{1}{4}[$ tel que $N_{m'}$ soit semblable à N_m

III.B.3) - $m \in [0, \frac{1}{4}[$ et $x_0^+ = \sqrt{\frac{1-m}{3}}$ et $x_0^- = -x_0^+$ sont les racines de P'_m , et pôles de N_m .

Montrons d'abord : $(b_m < x_0^-) \iff (\frac{-1}{2} [1 + \sqrt{1-4m}] < -\sqrt{\frac{1-m}{3}})$ qui équivaut à

$$(2 - 4m + 2\sqrt{1-4m} > \frac{4}{3}(1-m)) \iff (\sqrt{1-4m} > \frac{1}{3}(4m-1)) \quad \text{vrai}$$

car $4m-1 < 0$.

De plus $(m \in [0, \frac{1}{4}[) \iff (\frac{1-m}{3} \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}[) \iff (\sqrt{\frac{1-m}{3}} \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}[)$

D'où pour $m \in [0, \frac{1}{4}[$ $-1 < b_m < x_0^- < -\frac{1}{2} < a_m \leq 0 < \frac{1}{2} < x_0^+ < 1$

Alors : $P(x) = (x-1)(x-a_m)(x-b_m)$ et $N'_m(x) = \frac{P(x)P''(x)}{[P'(x)]^2} = \frac{2x(x-1)(x-a_m)(x-b_m)}{3[(x-x_0^+)(x-x_0^-)]^2}$

d'où : $N''_m(x) = \frac{P''(x)}{P'(x)} + \frac{P(x)}{[P'(x)]^3} [P'(x)P'''(x) - 2[P''(x)]^2]$ sur $]x_0^-, x_0^+[$

$$\text{avec } P'(x)P'''(x) - 2[P''(x)]^2 = 6[3x^2 + m - 1] - 72x^2 = 6[(m-1) - 9x^2] < 0$$

• sur $]x_0^-, a_m[$ $N'_m(x) < 0$ et $P(x) > 0, P'(x) < 0, P''(x) < 0$ d'où $N''_m(x) > 0$

• sur $]0, x_0^+[$ $N'_m(x) < 0$ et $P(x) < 0, P'(x) < 0, P''(x) > 0$ d'où $N''_m(x) < 0$

III.B.4) - Etudions les **variations** de $x \mapsto N_m(x) = \frac{2x^3 + m}{3(x-x_0^+)(x-x_0^-)}$ fraction rationnelle

$$N'_m(x) = \frac{2x(x-1)(x-a_m)(x-b_m)}{3[(x-x_0^+)(x-x_0^-)]^2} \quad \text{et on a une asymptote oblique : } y = \frac{2}{3}x$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|-----------|-------|------------|------------|---------|-------|------------|------------|---------|-----------|-----|------------|------------|
| x | $-\infty$ | b_m | x_0^- | x_0^- | x_1^- | a_m | 0 | x_1^+ | x_0^+ | x_0^+ | 1 | ∞ | |
| N'_m | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| N_m | | | \nearrow | \searrow | | | \nearrow | \searrow | | | | \searrow | \nearrow |
| | $-\infty$ | | $-\infty$ | | | | | | | $-\infty$ | | 1 | ∞ |

Sur $]x_0^-, a_m[$ N_m décroît de $+\infty$ vers a_m (une racine de P_m est un point fixe de N_m)

elle prend donc une fois et une seule la valeur x_0^+ en un point $x_1^- \in]x_0^-, a_m[$ $N_m(x_1^-) = x_0^+$

Sur $]a_m, 0[$ N_m croît de a_m à $\frac{m}{m-1} \geq a_m$. Puis sur $]0, x_0^+[$ N_m décroît de $\frac{m}{m-1}$ vers $-\infty$

elle prend donc une fois et une seule la valeur x_0^- en un point $x_1^+ \in]0, x_0^+[$ $N_m(x_1^+) = x_0^-$

Sur $]x_1^-, x_1^+[\subset]x_0^-, x_0^+[$ N_m prend des valeurs dans $]x_0^-, x_0^+[$

donc $M_m = N_m \circ N_m$ est bien définie et de classe C^∞ sur $]x_1^-, x_1^+[$

Par composition : M_m est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0^-, x_0^+, x_1^-, x_1^+\}$ et $M'_m(x) = N'_m(x) \times N'_m(N_m(x))$

qui s'annule donc aux zéros de N'_m $\{b_m, a_m, 0, 1\}$ et aux antécédents par N_m de ces zéros.

• $N_m(]-\infty, x_0^-]) \subset]-\infty, b_m]$ et M'_m ne s'annule sur $] -\infty, x_0^-[$ qu'en b_m

• $N_m(]x_0^+, \infty]) \subset [1, \infty[$ et M'_m ne s'annule sur $]x_0^+, \infty[$ qu'en 1

• Sur $]x_0^-, x_1^-[$ M_m décroît d'abord de $+\infty$ jusqu'à 1 valeur prise une seule fois par N_m qui décroît de ∞ à x_0^+ , puis M_m croît vers ∞

• Sur $]x_1^-, x_0^+[$ M_m croît d'abord de $-\infty$ jusqu'à b_m valeur prise une seule fois par N_m qui décroît de x_0^- à $-\infty$, puis M_m décroît vers $-\infty$

L'énoncé semble limiter l'étude à $]x_1^-, x_1^+[$

$$M''_m(x) = N''_m(x) \times N'_m(N_m(x)) + [N'_m(x)]^2 \times N''_m(N_m(x))$$

• Sur $]x_1^-, a_m]$ N_m décroît strictement de x_0^+ jusqu'à a_m et s'annule une seule fois en ξ^-

$$N_m(\xi^-) = 0 \quad \text{et} \quad M'_m(\xi^-) = 0 \quad \text{car} \quad N'_m(N_m(\xi^-)) = N'_m(0) = 0$$

Sur $]x_1^-, \xi^-[$ N_m décroît strictement de x_0^+ jusqu'à 0 et N'_m est négative et **décroît** sur $]0, x_0^+[$

$$N''_m(x) > 0, N'_m(N_m(x)) < 0, [N'_m(x)]^2 > 0 \quad \text{et} \quad N''_m(N_m(x)) < 0 \quad \text{donc} \quad M''_m(x) < 0$$

• Sur $]0, x_1^+[$ N_m décroît strictement de $\frac{m}{m-1}$ jusqu'à x_0^- et prend une fois la valeur a_m en ξ^+

$$N_m(\xi^+) = a_m \quad \text{et} \quad M'_m(\xi^+) = 0 \quad \text{car} \quad N'_m(N_m(\xi^+)) = N'_m(a_m) = 0$$

Sur $] \xi^+, x_1^+ [$ N_m décroît strictement de a_m jusqu'à x_0^- et N'_m est négative et **croît** sur $] x_0^-, a_m [$
 $N''_m(x) < 0$, $N'_m(N_m(x)) < 0$, $[N'_m(x)]^2 > 0$ et $N''_m(N_m(x)) > 0$ donc $M''_m(x) > 0$

III.B.5) - Variations de N_m sur $[\xi^-, \xi^+]$:
 et $\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} \in]-\frac{1}{3}, 0]$
 donc $N_m([\xi^-, \xi^+]) = [a_m, 0]$
 lui-même **stable** par N_m

| | | | | |
|--------|---------|------------|-----------------|------------|
| x | ξ^- | a_m | 0 | ξ^+ |
| N'_m | - | 0 | + | - |
| N_m | 0 | \searrow | \nearrow | \searrow |
| | | a_m | $\frac{m}{m-1}$ | a_m |

Ensuite : $N_m(x) - x = -\frac{P(x)}{P'(x)} < 0$ sur $[a_m, 0]$ donc la suite est **décroissante**, pour $n \geq 1$

et **minorée** par a_m , elle converge donc vers une limite ℓ dans $[a_m, 0]$ racine de P_m $\ell = a_m$

ainsi : $[\xi^-, \xi^+] \subset]\alpha(m), \beta(m)[$

III.B.6) - $x \in \{x_0^-, x_0^+, x_1^-, x_1^+\}$ ne définit pas une suite de Newton pour P_m
 (de même qu'une infinité dénombrable d'autres valeurs initiales interdites)

1^{er} cas : Si $x > x_0^+$ alors $1 \leq N_m(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $1 \leq N_m(x_n)$ d'où $x_{n+1} - x_n = -\frac{P(x_n)}{P'(x_n)} < 0$

la suite est décroissante et minorée : **elle converge** vers 1

2^{ème} cas : $x < x_0^-$ alors $N_m(x) \leq b_m$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $N_m(x_n) \leq b_m$ d'où $x_{n+1} - x_n = -\frac{P(x_n)}{P'(x_n)} > 0$

la suite est croissante et majorée : **elle converge** vers b_m

3^{ème} cas : $x \in]x_0^-, x_1^- [$ alors $x_1 > x_0^+$ et on est ramené au 1^{er} cas

4^{ème} cas : $x \in]x_1^+, x_0^+ [$ alors $x_1 < x_0^-$ et on est ramené au 2^{ème} cas

5^{ème} cas : Dans $]x_1^-, x_1^+ [$

Il n'y a pas de 2-cycle dans $[\xi^-, \xi^+]$, où les suites **convergent** vers a_m .

$(\alpha(m), \beta(m))$ est un 2-cycle de N_m et donc $x_1^- < \alpha(m) < \xi^- < \xi^+ < \beta(m) < x_1^+$

si $x \in]\alpha(m), \beta(m)[$ la suite **converge** vers a_m

Rappelons que ce cycle ne peut être attractif (question **I.E.2**) donc $\begin{cases} M'_m(\alpha(m)) \geq 1 \\ M'_m(\beta(m)) \geq 1 \end{cases}$

Si il y avait un autre 2-cycle de N_m : (x, y) on aurait : $x_1^- < x < \alpha(m) < \beta(m) < y < x_1^+$

x est un point fixe de M_m et $\begin{cases} M_m(x) = x \\ M_m(\alpha(m)) = \alpha(m) \end{cases}$ $x < \alpha(m)$ avec le théorème

des valeurs intermédiaires sur $]x, \alpha(m)[$, entrainerait : $\exists c \in]x, \alpha(m)[$ tel que $M'_m(c) = 1$
 ce qui contredirait la stricte décroissance assurée en **III.B.4**)

Il n'y a pas d'autre 2-cycle pour N_m

III.B.7) - Pour $m = 0$ alors $a_m = 0$, $N_0(x) = \frac{2x^3}{3x^2 - 1}$ est impaire donc M_0 est aussi impaire.

Si $\alpha(0) \neq -\beta(0)$ alors : $N_0(-\alpha(0)) = -\beta(0)$ assurerait l'existence d'un autre 2-cycle pour N_0

Ceci est exclu, donc $\alpha(0) = -\beta(0)$

Ainsi $\alpha \neq a_m = 0$ entraine $\left(N_0(\alpha) = \frac{2\alpha^3}{3\alpha^2 - 1} = -\alpha \right) \implies \left(\alpha^2 = \frac{1}{5} \right)$ d'où $\alpha(0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

III.B.8) - Pour $F(m, x) = M_m(x) - x$ On a une fraction rationnelle de dénominateur :

$$D(m, x) = (3x^2 + m - 1) \left[3(2x^3 + m)^2 + (m - 1)(3x^2 + m - 1)^2 \right]$$

F est C^∞ sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^2 des points où $D(m, x) \neq 0$

Notons $U_0 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ alors $U_0 \in \Omega$ et $F\left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0$

$G(m) = F\left(m, -\frac{1}{\sqrt{5}} + u m \right)$ est par composition C^∞ au voisinage de 0, on peut appliquer Taylor-Young,

et l'énoncé nous en donne un développement limité, par unicité : $G'(0) = 35u + \frac{25 - 7\sqrt{5}}{2}$

Ceci pour tout u fixé. Mais $G'(m) = \frac{\partial F}{\partial m}\left(m, -\frac{1}{\sqrt{5}} + u m \right) + u \frac{\partial F}{\partial x}\left(m, -\frac{1}{\sqrt{5}} + u m \right)$

$G'(0) = \frac{\partial F}{\partial m}(U_0) + u \frac{\partial F}{\partial x}(U_0)$ par égalité comme fonction de u , on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial m}(U_0) = \frac{25 - 7\sqrt{5}}{2} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(U_0) = 35$$

Le théorème des fonctions implicites s'applique donc en $U_0 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et assure l'existence d'une fonction g définie et C^1 sur un $]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$, telle que au voisinage V de U_0

$$\boxed{(F(m, x) = 0) \iff (x = g(m))}$$

Or $(F(m, x) = 0) \iff (M_m(x) = x)$ ce qui correspond soit à $(x, N_m(x))$ 2-cycle de N_m soit à x point fixe de N_m

$$H(m, x) = N_m(x) - x = -\frac{x^3 + (m-1)x - m}{3x^2 + m - 1} \text{ vaut } H(U_0) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1 - \frac{1}{5}}{\frac{3}{5} - 1} > 0$$

et reste strictement positive au voisinage de U_0 .

Donc x n'est pas point fixe de N_m , et $\boxed{x = \alpha(m)}$ le plus petit élément du cycle.

α est donc fonction C^1 de m au voisinage de 0 , et avec le théorème des fonctions implicites

$$\alpha'(0) = - \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial m}(U_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(U_0)} \right] \text{ Par Taylor-Young } \boxed{\alpha(m) = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{7\sqrt{5} - 25}{70} m + o(m)}$$

III.C.1) - 0 est 2-périodique si et seulement si $\boxed{M_m(0) = 0 \text{ et } N_m(0) \neq 0}$

Ce qui équivaut à $2m^3 + m(m-1)^3 = 0$ et $m \neq 0$ Notons $h(m) = 2m^2 + (m-1)^3$

Alors $h'(m) = 4m + 3(m-1)^2 = 3m^2 - 2m + 3$ reste positif sur \mathbb{R} $h'(m) > 0$

La fonction polynôme du troisième degré s'annule donc une fois et une seule sur \mathbb{R} ,

$\boxed{\text{Il existe un seul } m_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } 0 \text{ soit 2-périodique pour } N_m}$

$h(0) = -1$ et $h(1) = 2$ donc $\boxed{m_0 \in]0, 1[}$ et on peut continuer par **dichotomie**.

III.C.2) - $M'_{m_0}(0) = N'_{m_0}(0) \times N'_{m_0}(N_{m_0}(0)) = 0$ car le premier terme est nul

Et $F(m_0, 0) = M_m(0) - 0 = 0$ pour $(m_0, 0) \in \Omega$

$\frac{\partial F}{\partial x}(m_0, 0) = M'_{m_0}(0) - 1 = -1 \neq 0$ On peut appliquer le théorème de Fonctions implicites.

Il existe une fonction φ définie et C^1 au voisinage de m_0 telle que :

$$(M_m(x) = x) \iff (x = \varphi(m)) \text{ et } \varphi(m_0) = 0$$

$N_{m_0}(0) \neq 0$ et par continuité : $N_m(\varphi(m)) \neq 0$ au voisinage de m_0

$M'_m(\varphi(m))$ est nul en m_0 donc reste strictement inférieur à 1 au voisinage de m_0

$\boxed{\text{Ainsi il existe } \eta > 0 \text{ tel que si } |m - m_0| < \eta \text{ alors } N_m \text{ admet un 2-cycle } (x, N_m(x)) \text{ avec } x = \varphi(m) \text{ attractif, et qui attire } 0 \text{ et ses itérés successifs.}}$